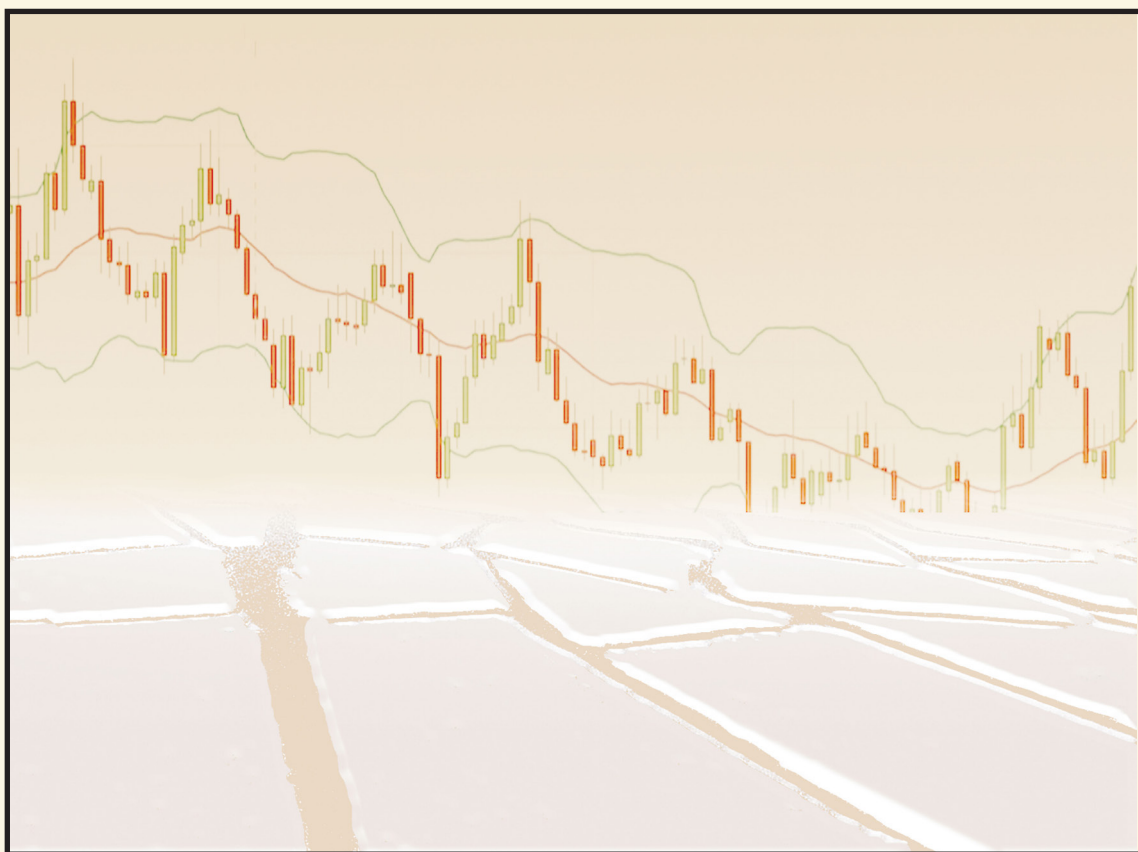


Matematica finanziaria

Fondamenti, metodi e applicazioni

Andrea Consiglio, Simone Giansante,
Davide Provenzano



Manuali

Andrea Consiglio, Simone Giansante, Davide Provenzano

Matematica Finanziaria: fondamenti, metodi e applicazioni



Milano University Press

Matematica Finanziaria: fondamenti, metodi e applicazioni/ Andrea Consiglio, Simone Giansante, Davide Provenzano. Milano: Milano University Press, 2026.

ISBN 979-12-5510-370-7 (print)

ISBN 979-12-5510-375-2 (PDF)

ISBN 979-12-5510-377-6 (EPUB)

DOI 10.54103/milanoup.281

Per il presente volume, il Comitato editoriale ha autorizzato una procedura di revisione interna o editoriale in luogo della consueta revisione tra pari. Tutte le pubblicazioni di Milano University Press vengono valutate e approvate dal Comitato editoriale e devono essere conformi alla politica di revisione, al codice etico e alle misure antiplagio espressi nelle Linee Guida per pubblicare su MilanoUP.

Le edizioni digitali dell'opera sono rilasciate con licenza Creative Commons Attribution 4.0 - CC-BY-NC-SA, il cui testo integrale è disponibile all'URL: <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.it>



Le edizioni digitali online sono pubblicate in Open Access su: <https://libri.unimi.it/index.php/milanoup>.

© The Author(s), 2026

© Milano University Press per la presente edizione

Pubblicato da:

Milano University Press

Via Festa del Perdono 7 - 20122 Milano

Sito web: <https://milanoup.unimi.it>

e-mail: redazione.milanoup@unimi.it

L'edizione cartacea del volume può essere ordinata in libreria ed è distribuita da Ledizioni (www.ledizioni.it)

Indice

Prefazione	vii
1 Introduzione ai tassi di interesse	1
1.1 Operazioni finanziarie	1
1.1.1 Operazioni finanziarie a pronti	1
1.1.2 Operazioni finanziarie a termine	3
1.2 Interesse semplice	4
1.2.1 Basi finanziarie	9
1.3 Sconto semplice	12
1.4 Approfondimento	16
2 Modelli di interesse	21
2.1 Valore attuale e futuro	21
2.2 Il modello lineare d'interesse	22
2.2.1 I Buoni Ordinari del Tesoro (BOT)	28
2.2.2 Prezzi e tassi a termine	35
2.2.3 Il Forward Rate Agreement (FRA)	35
2.3 Il modello lineare di sconto	39
2.4 Il modello esponenziale	44
2.5 Tassi finanziariamente equivalenti	51
2.6 Tassi effettivi e tassi nominali	52
2.7 Intensità istantanea d'interesse	54
3 Flussi e portafogli finanziari	57
3.1 Valore di un flusso finanziario	57
3.2 Valore di un portafoglio finanziario	59
3.3 Rendite ed ammortamenti	60
3.4 Piani di ammortamento	68
3.5 Piani di ammortamento alternativi	76

3.5.1	Ammortamento all'americana o a doppio tasso	77
3.5.2	Ammortamento alla tedesca o a interessi anticipati . .	79
3.6	Titoli a cedola fissa	81
3.6.1	Il rendimento a scadenza	84
3.6.2	Quotazione dei titoli a reddito fisso	86
3.7	Titoli indicizzati	87
3.7.1	Titoli a cedola nulla indicizzati	87
3.7.2	Titoli a tasso variabile	91
3.8	Titoli indicizzati all'inflazione — BTP Italia e BTP€i	94
3.9	I mutui indicizzati	98
4	Prezzi e struttura dei tassi	103
4.1	Ipotesi caratteristiche del mercato	103
4.2	Teoremi fondamentali	104
4.2.1	Teorema di decrescenza rispetto alla scadenza	104
4.2.2	Teorema di linearità del prezzo	107
4.2.3	Teorema dei prezzi impliciti	109
4.2.4	Teorema di valutazione della cedola indicizzata	114
4.3	Grandezze caratteristiche del mercato	115
5	Misure della dispersione	119
5.1	La Duration	119
5.1.1	Un'analogia fisica: il baricentro dei flussi	120
5.1.2	Definizione formale della duration	121
5.1.3	Duration e struttura dei tassi	123
5.1.4	Misure complementari della duration	123
5.2	Semielasticità e Convexity	125
6	Criteri di scelta finanziaria	131
6.1	Valore Attuale Netto (VAN)	132
6.1.1	Valutazione di un singolo progetto di investimento . .	133
6.1.2	Progetti mutualmente esclusivi	134
6.1.3	Esistenza di vincoli di capitale	136
6.2	Tasso Interno di Rendimento (TIR)	139
6.2.1	Interpretazione e criterio di scelta	139
6.2.2	Dipendenza dalla struttura dei flussi di cassa	140
6.2.3	Ambiguità e limiti del TIR	142
6.2.4	Progetti mutualmente esclusivi	145
6.3	Il Tasso Annuale Effettivo Globale (TAEG)	147

6.4	Approfondimento	149
7	Metodi per la misurazione della struttura dei tassi	153
7.1	Metodi grafici	153
7.2	Metodo bootstrap	155
7.3	Strategie di speculazione sulla struttura a termine	158
7.3.1	Teorema dei prezzi certi	158
8	Strategie di hedging	167
8.1	Definizione di hedging	167
8.2	Posizioni lunghe e corte	168
8.3	Dedication	170
8.4	Hedging utilizzando la duration	173
8.4.1	Duration gap e aggiustamento dell'hedge ratio	176
8.5	Correzione per convexity nelle strategie di hedging	179
8.5.1	Evoluzione della struttura dei tassi e limiti della duration	181
8.6	Approfondimento	185
9	Futures	193
9.1	Definizione e struttura	193
9.1.1	Specifiche contrattuali	194
9.1.2	Quotazione	199
9.1.3	Payoff	200
9.1.4	Evoluzione e chiusura delle posizioni	201
9.2	Il meccanismo del mark-to-market	202
9.3	Prezzi dei futures e dei forward	205
9.4	Hedging con futures sui tassi a breve termine	211
9.5	Hedging con futures sui tassi a lungo termine	215
9.5.1	Fattore di conversione	215
9.5.2	Il cheapest-to-delivery	218
9.5.3	Hedge ratio e cheapest-to-delivery	219
10	Swap	227
10.1	Definizione e struttura	227
10.2	Gli swap per la gestione del rischio di tasso	228
10.3	Swap e credit arbitrage	230
10.4	Valutazione degli swap	234
10.5	Il bootstrap della curva dei tassi swap	237

Ai miei genitori, radici salde;
a Giusy, compagna di viaggio;
a Camilla, la mia eredità.

AC

Ai miei genitori, il mio porto sicuro;
A mia sorella Manuela, il volto artistico di queste pagine;
a Rita, semplicemente tutto.

SG

Ai miei figli, Irene e Francesco.

DP

Prefazione

Questo testo nasce dall'esperienza didattica maturata negli insegnamenti di Matematica Finanziaria presso l'Università degli Studi di Palermo. Nel corso degli anni, il confronto costante con gli studenti ha evidenziato la necessità di disporre di un materiale organico, aggiornato e aderente alle esigenze dei corsi di laurea in economia e finanza, capace di coniugare rigore matematico e chiarezza espositiva.

L'obiettivo principale di queste pagine è offrire uno strumento di studio che consenta di comprendere, in modo graduale ma rigoroso, i fondamenti teorici e gli strumenti operativi della matematica finanziaria. L'attenzione è rivolta tanto agli aspetti concettuali — come la formalizzazione dei tassi, la costruzione della struttura a termine, i criteri di scelta intertemporale — quanto all'applicazione pratica, attraverso esempi tratti dai mercati reali, dall'analisi dei titoli di stato ai contratti derivati.

La struttura del testo riflette l'evoluzione logica della disciplina: dalle nozioni elementari di interesse e sconto ai modelli di capitalizzazione, dai flussi finanziari alla valutazione dei portafogli, fino ai principi di arbitraggio e alle strategie di gestione del rischio. Ogni capitolo è corredato di esempi numerici e di riferimenti alle convenzioni di mercato, affinché il lettore possa apprezzare la connessione tra teoria e pratica.

Pur mantenendo un linguaggio formale, si è cercato di rendere la trattazione accessibile, evitando eccessivi tecnicismi laddove non indispensabili. Alcune sezioni sono dedicate ad approfondimenti, che possono essere trascurate in una prima lettura, ma risultano utili per chi desidera esplorare la disciplina in modo più analitico.

La Matematica Finanziaria, più che una collezione di formule, è un linguaggio per interpretare le decisioni economiche nel tempo. Studiare le

relazioni tra capitale, interesse e rischio significa, in fondo, comprendere la dinamica delle scelte umane in condizioni di incertezza. Se queste pagine contribuiranno a sviluppare negli studenti il gusto per il ragionamento quantitativo e la consapevolezza critica nell'uso dei modelli, l'intento con cui sono state scritte potrà dirsi raggiunto.

In coerenza con questo intento formativo, il presente volume è pubblicato in modalità **open access** ed è liberamente scaricabile e stampabile. La scelta di rendere il testo gratuitamente accessibile nasce dal desiderio di favorire la più ampia diffusione della conoscenza e degli strumenti analitici qui presentati.

Gli autori invitano i lettori che ritengano utile quanto contenuto nel volume a sostenere, su base volontaria, l'attività di organizzazioni umanitarie — in particolare Emergency (<https://en.emergency.it/>) — o altre iniziative impegnate in interventi di assistenza e solidarietà internazionale.

Andrea Consiglio
Simone Giansante
Davide Provenzano

Capitolo 1

Introduzione ai tassi di interesse

1.1 Operazioni finanziarie

Si definisce **operazione finanziaria** (o.f.) lo scambio non contestuale di importi monetari, ossia lo scambio di denaro tra istanti temporali distinti. Tale scambio si effettua a fronte del pagamento di un **interesse** che rappresenta finanziariamente il costo (ricavo) dell'operazione per chi riceve (consegna) il denaro assumendo l'obbligo (il diritto) di rimborso (incasso) alla scadenza futura dell'operazione.

In ambito finanziario si distinguono o.f. **a pronti** (spot) ed o.f. **a termine** (forward).

1.1.1 Operazioni finanziarie a pronti

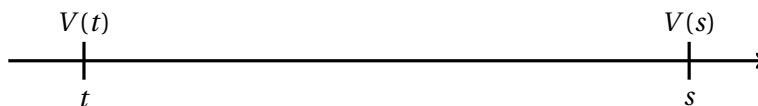


Figura 1.1: Rappresentazione grafica di un'operazione finanziaria spot.

Una o.f. è detta a pronti (spot) se la stipula del contratto coincide con l'istante in cui avviene la transazione. Se si indica con t l'istante di stipula del contratto e con s la sua scadenza ($t < s$), in t uno dei contraenti riceverà $V(t)$ unità di capitale e, alla scadenza s , restituirà $V(s)$ unità di capitale.

Se si riportano gli istanti temporali t e s sull'asse del tempo, l'o.f. spot si rappresenta come in Figura 1.1.

È evidente che la stessa operazione spot può essere vista in modo speculare dal contraente che ha versato $V(t)$ unità di capitale in t e che riceverà $V(s)$ alla scadenza s del contratto.

Un esempio di o.f. spot è l'acquisto di un **Buono Ordinario del Tesoro (BOT)**. Alla stipula del contratto (l'acquisto del BOT), l'investitore versa un importo pari a $V(t)$. A scadenza, l'investitore sarà rimborsato di un ammontare pari a $V(s)$ (es.: $t = 0$ ed $s = 90$ giorni). In questo caso, lo Stato italiano è il contraente che riceverà $V(t)$ unità di capitale in t (finanziamento del debito pubblico) e dovrà sostenere un esborso pari a $V(s)$ a scadenza.

Se si indica con $M(t, s)$ il valore in s di una unità di capitale disponibile in t , impiegando $V(t)$ unità di capitale in t , alla scadenza s del contratto si otterrà:

$$V(s) = V(t) \times M(t, s). \quad (1.1)$$

L'Eqn. (1.1) definisce l'equivalenza temporale tra capitali disponibili in istanti distinti. Dato $M(t, s)$, la (1.1) determina il valore monetario in s , $V(s)$, finanziariamente equivalente ad una quantità di capitale $V(t)$ disponibile in t . Tramite la (1.1) è anche possibile, inversamente, esprimere il capitale in t equivalente a una somma disponibile in s . Infatti, con semplici passaggi algebrici si ottiene:

$$V(t) = V(s) \times \frac{1}{M(t, s)} = V(s) \times B(t, s). \quad (1.2)$$

Il fattore $B(t, s) = 1/M(t, s)$ rappresenta il valore, in t , di un'unità di capitale disponibile in s . Dato $B(t, s)$, la (1.2) determina il valore monetario in t , $V(t)$, finanziariamente equivalente ad una quantità di capitale $V(s)$ disponibile in s .

I fattori $M(t, s)$ e $B(t, s)$ hanno un significato strettamente economico. Il fattore $M(t, s)$ può essere considerato il compenso che un investitore è disposto ad accettare in s per rinunciare a consumare un'unità di capitale in t . In modo analogo, $B(t, s)$ rappresenta il prezzo che un investitore è disposto a pagare in t per entrare in possesso di un'unità di capitale in s . I fattori $M(t, s)$ e $B(t, s)$, oltre a rappresentare il corrispettivo per unità di capitale, costituiscono i fattori di scambio fra due capitali esigibili in istanti di tempo diversi. In altri termini, applicando il fattore $M(t, s)$ a un capitale $V(t)$ disponibile in t , è possibile determinarne il valore in s . Analogamente,

applicando al capitale $V(s)$, esigibile nell'istante futuro s , il fattore $B(t, s)$ è possibile determinarne il valore in t . In questi casi, i termini $M(t, s)$ e $B(t, s)$ permettono, rispettivamente, di "spostare" in avanti (**posticipare**) i capitali disponibili in t , o di "spostare" indietro (**attualizzare**) i capitali disponibili in s . Nella letteratura finanziaria, $M(t, s)$ è noto anche come **fattore montante** per unità di capitale, mentre $B(t, s)$ è noto come **fattore di sconto** (o **fattore di attualizzazione**) per unità di capitale.

Da un punto di vista matematico, $M(t, s)$ e $B(t, s)$ sono funzioni di due variabili reali. Inoltre, $B(t, s)$ è una funzione reciproca di $M(t, s)$. Questa proprietà è importante in quanto permette di concentrare il nostro studio sulle caratteristiche di una sola delle due funzioni.

Un soggetto razionale è disposto a rinunciare a una somma di denaro oggi se e solo se riceverà in cambio un ammontare di denaro maggiore in futuro¹. Per questo motivo deve essere $V(s) > V(t)$. Dalla relazione (1.1) discende allora che $M(t, s) > 1$ e, di conseguenza, $B(t, s) < 1$. Come meglio si chiarirà in seguito, nella pratica, le funzioni $M(t, s)$ e $B(t, s)$ dipendono soltanto dalla differenza $\tau = s - t$, ossia dall'intervallo di tempo che intercorre fra l'istante di stipula e la scadenza del contratto.

1.1.2 Operazioni finanziarie a termine

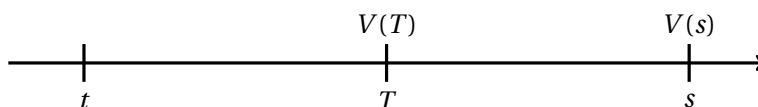


Figura 1.2: Rappresentazione grafica di un'operazione finanziaria forward.

Una o.f. è detta a termine (forward) se lo scambio di importi monetari avviene in un istante successivo a quello della stipula del contratto. Se si indica con t l'istante di stipula del contratto, con s la scadenza dello stesso e con T l'istante in cui avviene la transazione ($t \leq T < s$), all'istante T uno dei contraenti riceverà $V(T)$ unità di capitale e restituirà $V(s)$ unità di capitale in s .

Se si riportano gli istanti temporali sull'asse dei tempi, l'o.f. forward è mostrata in Figura 1.2. Si osservi che in t non avviene alcun movimento di capitali. La transazione è effettuata in T e la restituzione del capitale in s . Una volta trascorso il periodo $T - t$, l'o.f. a termine presenta le

¹Vedi l'approfondimento alla fine di questo capitolo.

stesse caratteristiche di una o.f. a pronti. Pertanto, si possono estendere le considerazioni fatte per le o.f. spot alle o.f. forward. In particolare, se si indica con $M(t, T, s)$ il valore in s , pattuito in t , di una unità di capitale disponibile in T , date $V(T)$ unità di capitale disponibili in T , alla scadenza s del contratto si avrà:

$$V(s) = V(T) \times M(t, T, s). \quad (1.3)$$

In maniera analoga, ponendo $B(t, T, s) = 1/M(t, T, s)$, si ottiene:

$$V(T) = V(s) \times B(t, T, s). \quad (1.4)$$

Poiché, in generale, $V(s) > V(T)$, ne consegue che $M(t, T, s) > 1$ e $B(t, T, s) < 1$.

1.2 Interesse semplice

In termini finanziari, l'**interesse** o **rendimento (yield)** di un'attività (asset) è determinato da un reddito periodico, dalla variazione del prezzo del titolo o da entrambe le fonti.

Per esempio, se si acquista oggi un BOT che è quotato a 98.75 e lo si rivende fra una settimana a 99.25, il rendimento o interesse è dato dalla variazione del prezzo (variazione in conto capitale). Nel caso di un **Buono del Tesoro Poliennale (BTP)**, l'interesse è composto dalla cedola semestrale e dalla variazione in conto capitale.

L'interesse semplice rappresenta il ricavo derivante da un investimento (o il costo sopportato da un debitore nel caso di passività) per il periodo in cui l'o.f. è stata posta in essere. In una o.f. spot, il capitale finale, $V(s)$, è costituito dal capitale iniziale, $V(t)$, più gli interessi maturati nell'intervallo di tempo $\tau = s - t$ (si ricordi che, in condizioni ordinarie dei mercati finanziari, affinché l'operazione di scambio abbia significato, deve essere $V(s) > V(t)$). Se si indicano con $I(t, s)$ gli interessi maturati nell'intervallo di tempo τ , si avrà:

$$V(s) = V(t) + I(t, s) \quad (1.5)$$

da cui,

$$I(t, s) = V(s) - V(t). \quad (1.6)$$

Si definisce **tasso d'interesse periodale** la remunerazione per unità di capitale $V(t)$ sull'intervallo τ . In simboli:

$$i_\tau(t, s) = \frac{I(t, s)}{V(t)} = \frac{V(s) - V(t)}{V(t)}, \quad (1.7)$$

da cui

$$I(t, s) = V(t) i_\tau(t, s). \quad (1.8)$$

Sostituendo nella (1.7) la (1.1) e raccogliendo a fattore comune, si ottiene

$$i_\tau(t, s) = \frac{V(t)[M(t, s) - 1]}{V(t)} = M(t, s) - 1, \quad (1.9)$$

Sia i il tasso d'interesse per impieghi annuali. Assumendo che, per intervalli temporali di durata inferiore o superiore all'anno, gli interessi siano proporzionali al tasso i — rispettivamente in misura frazionaria o multipla — si può scrivere che

$$i_\tau(t, s) = i \times \frac{\tau}{n}, \quad (1.10)$$

con $\tau = s - t$ ed n pari al numero di giorni in un anno.

Si osservi che il tasso i può essere espresso con riferimento a segmenti temporali diversi dall'anno, come illustrato nell'Esempio 1.2. Inoltre, la validità della relazione (1.10) dipende dalle specifiche condizioni contrattuali. In generale, può quindi risultare necessario considerare un tasso annuale riferito a un determinato intervallo $[t, s]^2$. In tal caso, si ha

$$i_\tau(t, s) = i(t, s) \times \frac{\tau}{n}. \quad (1.11)$$

Esempio 1.1. *Un deposito bancario paga l'1.37% annuale sulle giacenze. Il 05/07/2023 sono stati versati €100,000.00. A quanto ammonta l'interesse maturato al 15/09/2023?*

Si osservi che il tasso d'interesse esprime la remunerazione di un'operazione finanziaria di durata annua. Nel caso in esame, si richiede di determinare l'interesse maturato nel periodo compreso tra il 05/07/2023 e il 15/09/2023, ossia per $t = 05/07/2023$ ed $s = 15/09/2023$. Si assume, in conformità alle condizioni contrattuali, che per intervalli di durata inferiore all'anno la remunerazione per unità di capitale sia

²Come si vedrà in seguito, i tassi EURIBOR, pur essendo espressi su base annuale, si differenziano per la durata dell'impiego (settimanale, mensile, trimestrale, ecc.).

Isin	Descrizione	Prezzo ultimo	Cedola (%)	Scadenza	Prezzo di acquisto	Prezzo di vendita
IT0001086567	Btp-1nv26 7.25%	112.86	3.625	01/11/2026	112.00	114.00
IT0001174611	Btp-1nv27 6.5%	112.84	3.250	01/11/2027	112.00	114.60
IT0001278511	Btp-1nv29 5.25%	109.18	2.625	01/11/2029	107.00	112.40
IT0001444378	Btp-1mg31 6%	115.10	3.000	01/05/2031	114.00	115.98
IT0003256820	Btp-1fb33 5.75%	113.50	2.875	01/02/2033	112.00	114.19
IT0003535157	Btp-1ag34 5%	107.39	2.500	01/08/2034	106.50	108.50
IT0003745541	Btpi-15st35 2.35%	105.33	1.175	15/09/2035	103.90	106.50
IT0003934657	Btp-1fb37 4%	97.79	2.000	01/02/2037	97.26	97.99
IT0004286966	Btp-1ag39 5%	107.66	2.500	01/08/2039	107.00	107.80

Tabella 1.1: Quotazioni di Buoni del Tesoro Poliennale. Fonte: <http://www.borse.it/quotazioni/obbligazioni/btp>.

espressa come frazione del tasso annuo. In generale, tuttavia, può essere necessario considerare un tasso specifico per l'intervallo $[t, s]$.

Se si ipotizza una valuta a decorrere dal giorno successivo al deposito, utilizzando come calendario quello commerciale, composto da 360 giorni e mesi di 30 giorni, il numero di giorni su cui deve essere corrisposto l'interesse è pari a $\tau = s - t = 69$ (contro i 71 del calendario solare).

Nel nostro esempio, data la somma iniziale $V(t) = C = \text{€}100,000$, il rendimento annuo, cioè il rendimento per una giacenza di un anno, conteggiato secondo l'anno commerciale (360 giorni), è pari a:

$$I(0, 360) = C \times i(0, 360) = \text{€}100,000 \times \frac{1.37}{100} = \text{€}1,370.$$

La frazione di anno è data da:

$$\frac{\tau}{n} = \frac{69}{360} = 0.192,$$

e gli interessi maturati nella frazione di anno da:

$$I(0, 69) = C \times i(0, 360) \times \frac{\tau}{n} = \text{€}100,000 \times \frac{1.37}{100} \times 0.192 = \text{€}262.58.$$

■

Esempio 1.2. Si consideri il BTP con scadenza 1 febbraio 2037 (ISIN IT0003934657) e si determini l'esborso complessivo per l'acquirente in data 16/05/2023.

Il titolo in esame presenta le seguenti caratteristiche (si veda Tabella 1.2):

- data di godimento: 14/10/2005;
- data di scadenza: 01/02/2037;
- cedola annua: $i = 4.00\%$, con periodicità semestrale;
- lotto minimo negoziabile: €1,000.

Le cedole sono pagate il 01/02 e il 01/08 di ogni anno. Pertanto, l'interesse per unità di capitale in ciascuna epoca cedolare (tasso prossima cedola^a) è:

$$i(0, 0.5) = \frac{4.00\%}{2} = 2.00\%$$

Se il titolo è acquistato il 15/05/2023, con valuta 16/05/2023, l'acquirente deve corrispondere al venditore il **rateo di interesse** maturato dal 01/02/2023 (data di godimento dell'ultima cedola) al 16/05/2023. Il titolo è quotato al MOT con prezzo ufficiale $P = 96.0406$. Per i titoli di Stato italiani, i giorni si calcolano secondo la convenzione **ACT/ACT** su base periodale. Dal 01/02 al 15/05 intercorrono 105 giorni, compreso il giorno di valuta. Il semestre (01/02-01/08) è composto da 181 giorni.

Si consideri un acquisto per un valore facciale di $C = € 100,000$. Gli interessi lordi maturati (rateo lordo) sono dati da:

$$i(0, 104) = C \times i(0, 0.5) \times \frac{\tau}{n} = € 100,000 \times 0.02 \times 0.580110497 = € 1,160.22$$

dove $\tau/n = 105/181 = 0.580110497$ rappresenta la frazione temporale di godimento effettivo della cedola.

Il rateo può essere espresso anche in percentuale del valore facciale:

$$R(f)_{\text{lordo}} = i(0, 0.5) \times \frac{\tau}{n} = 2.00\% \times 0.580110497 = 1.16022\%$$

dove $f = \tau/n$ indica la frazione di periodo maturata. Il rateo cresce linearmente fino al momento dello stacco cedolare, quando raggiunge il suo valore massimo.

Applicando l'aliquota di imposta del 12.50%, si ottiene il **rateo netto**:

$$R(f)_{\text{netto}} = 1.16022\% \times (1 - 0.125) = 1.01519\%.$$

Il prezzo del titolo comprensivo del rateo netto, detto prezzo **tel quel** (o **dirty price**), è dato da:

$$P_{tq} = P + R(f)_{\text{netto}} = 96.0406 + 1.01519 = 97.0558.$$

Poiché i prezzi dei titoli sono espressi in percentuale del valore facciale, il costo effettivo per l'acquirente è:

$$C \times \frac{P_{tq}}{100} = € 100,000 \times \frac{97.0558}{100} = € 97,055.80$$

L'esborso complessivo per l'acquirente ammonta quindi a € 97,055.80. ■

^aÈ stabilito contrattualmente che $i(0, 0.5) = i(0, 1)/2$, ossia che il tasso semestrale sia la metà del tasso annuale.

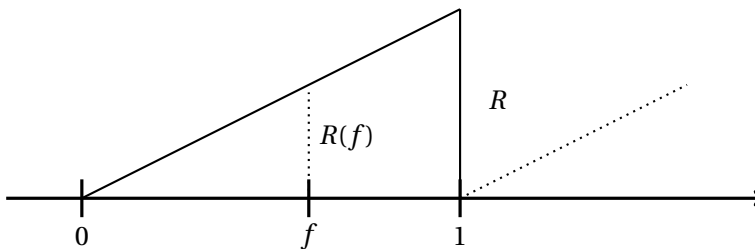


Figura 1.3: Evoluzione del rateo di un BTP in funzione del periodo di godimento della cedola.

1.2.1 Basi finanziarie

Nei mercati finanziari le convenzioni temporali per il calcolo degli interessi, anche dette **basis** o **basi**, possono assumere diverse forme e sono rappresentate sinteticamente da:

$$\frac{Act}{Act}; \frac{E30}{360}; \frac{30}{360}; \frac{Act}{360}; ecc.$$

Al numeratore è indicata la modalità di conteggio dei giorni fra i due eventi finanziari, mentre al denominatore è indicata la modalità di conteggio dei giorni di un anno o del periodo di riferimento dell'operazione finanziaria. *Act (Actual)* indica che il conteggio dei giorni è effettuato in base al numero effettivo di giorni tra due date. La sigla *E30 (European 30)* indica la convenzione secondo la quale i giorni sono calcolati utilizzando il calendario commerciale. $[E30/360]$ è la base per i depositi europei (Esempio 1.1), mentre $[Act/Act]$ è la convenzione utilizzata per il calcolo degli interessi nei mercati obbligazionari (Esempio 1.2).

L'ammontare effettivo degli interessi può variare a seconda della base adottata. Di solito i tassi quotati sono nominali. Ciò implica che due tassi nominali identici possono produrre interessi effettivi diversi tali da neutralizzare il guadagno previsto o addirittura causare perdite. Per questo motivo, prima di procedere a scelte di natura finanziaria, è opportuno determinare il tasso effettivo dell'operazione. Il concetto di tassi equivalenti, nominali ed effettivi è molto importante e sarà approfondito nei capitoli successivi.

Esempio 1.3. *Tra un deposito e un Treasury Bond (T-Bond) entrambi con tasso nominale annuo del 5%, quale investimento a 59 giorni offre un rendimento effettivo maggiore?*

Sul mercato monetario statunitense sono disponibili le seguenti opzioni di investimento a breve termine:

- un deposito che remunera il capitale al tasso annuo del 5%, base *Act/365*;
- un T-Bond che paga lo stesso tasso annuo del 5%, base *Act/360*.

Si consideri un investimento di € 10,000,000 per un periodo di 59 giorni (pari a due mesi). Poiché il numeratore della convenzione è identico in entrambi i casi (*Act*), il periodo temporale considerato è lo stesso.

I rendimenti effettivi ottenuti sono:

$$€ 10,000,000 \times 0.05 \times \frac{59}{365} = € 80,821.92$$

$$€ 10,000,000 \times 0.05 \times \frac{59}{360} = € 81,944.44$$

Sebbene i due tassi nominali coincidano, la diversa base di calcolo comporta rendimenti effettivi differenti: il T-Bond, calcolato su base *Act/360*, offre un rendimento leggermente superiore rispetto al deposito *Act/365*. ■

Esempio 1.4. *Quale tasso risulta più conveniente tra due quotazioni con basi diverse, [Act/360] e [Act/365]?*

Il tasso **EURIBOR (European Interbank Offered Rate)** per operazioni con scadenza a una settimana è quotato al 2.915%, base [Act/360]. Si ipotizzi inoltre che sul mercato sia possibile reperire fondi per la stessa scadenza a un tasso del 2.930%, base [Act/365].

Per poter confrontare i due tassi è necessario esprimerli sulla stessa base di calcolo. Supponiamo di convertire il tasso EURIBOR da [Act/360] a [Act/365]. Cerchiamo quindi quel tasso i su base [Act/365] che produce lo stesso ammontare di interessi di un tasso del 2.915% su base [Act/360]:

$$i \times \frac{Act}{365} = 2.915\% \times \frac{Act}{360}.$$

Da cui si ottiene:

$$i = 2.915\% \times \frac{365}{360} = 2.955\% \text{ [Act/365]}.$$

Il tasso EURIBOR del 2.915% su base [Act/360] è quindi equivalente a un tasso del 2.955% su base [Act/365]. Poiché il tasso di mercato

disponibile è pari al 2.930% [Act/365], quest'ultimo risulta più conveniente, in quanto inferiore di circa 2.5 punti base^a

Analogamente, per convertire un tasso da base [Act/365] a base [Act/360], è sufficiente moltiplicare per il rapporto 360/365:

$$2.930\% \times \frac{360}{365} = 2.890\% \text{ [Act/360]}.$$

L'operazione di finanziamento al 2.930% [Act/365] è dunque più vantaggiosa rispetto a quella basata sul tasso EURIBOR [Act/360]. ■

^aSi veda la definizione di *punti base* o *basis point* nel Glossario.

Esempio 1.5. Convertire un tasso EURIBOR espresso su base 360 in un tasso equivalente su base 365.

La Tabella 1.3 mostra, alla data del 31/03/2023, un tasso **EURIBOR 1M** pari a 2.915% (base 360, **Fixing**). Si desidera determinare il tasso equivalente su base 365 giorni (**Fixing 365**), al fine di rendere coerente il confronto con altre quotazioni espresse sulla stessa base temporale.

Per effettuare la conversione della base di calcolo è sufficiente impostare la proporzione:

$$\text{Fixing } 360 : 360 = \text{Fixing } 365 : 365,$$

da cui si ottiene:

$$\text{Fixing } 365 = 2.915\% \times \frac{365}{360} = 2.955\%.$$

Il valore così calcolato è riportato nella colonna **Fixing 365** in corrispondenza del tasso EURIBOR 1M. ■

Di solito i giornali finanziari quotano i tassi nelle due basi più comuni. Per esempio, i tassi EURIBOR (si veda la Tabella 1.3) sono quotati con base 360 e 365 (si assume Act).

1.3 Sconto semplice

Un creditore può richiedere che l'interesse pattuito sia corrisposto anticipatamente al momento dell'esecuzione del contratto. In tal caso, il creditore dedurrà gli interessi dall'ammontare del capitale concordato nell'operazione di **finanziamento**.

Strumenti finanziari a cui si applica la modalità appena descritta sono le **cambiali commerciali**, che possono essere scontate a un tasso prefissato presso gli istituti bancari; i **T-Bill** (titoli di debito del Tesoro americano), che pagano in anticipo gli interessi; e le **cambiali finanziarie**.

Le cambiali finanziarie (c.f. o commercial papers) sono strumenti che permettono alle imprese di finanziare il debito (reperire liquidità) a breve termine, pagando un interesse anticipato e ricorrendo direttamente al mercato.

Il tasso impiegato per il calcolo degli interessi da pagare anticipatamente è detto **tasso di sconto** e l'operazione è denominata **sconto**.

Come visto nella Sezione 1.2, il pagamento degli interessi alla scadenza del contratto implica che,

$$V(s) = V(t) + I(t, s) = V(t) + V(t) \times i_\tau(t, s), \quad (1.12)$$

dove l'interesse è calcolato sul capitale iniziale.

Nel caso di o.f. di sconto (spot o forward), gli interessi sono calcolati sul capitale finale ed il valore iniziale, $V(t)$, si ottiene detraendo dal capitale finale, $V(s)$, l'ammontare di interessi ottenuto, $D(t, s)$, detto sconto.

Formalmente:

$$V(t) = V(s) - D(t, s) = V(s) - V(s)d_\tau(t, s), \quad (1.13)$$

dove $d_\tau(t, s)$ è il tasso di sconto su base periodale τ per una o.f. di durata da t ad s . Con semplici passaggi algebrici si verifica facilmente che

$$d_\tau(t, s) = \frac{V(s) - V(t)}{V(s)}, \quad (1.14)$$

da cui si ottiene il tasso su base annua $d(t, s)$ per una o.f. di durata da t ad s

$$d(t, s) = \frac{V(s) - V(t)}{V(s)} \times \frac{n}{\tau}. \quad (1.15)$$

Si osservi che, sia nelle operazioni di sconto che in quelle d'interesse semplice, la remunerazione del capitale, in termini assoluti, è identica. Infatti

$$I(t, s) = V(s) - V(t) = D(t, s).$$

La differenza fondamentale è nella remunerazione per unità di capitale, cioè nel tasso di sconto e nel tasso d'interesse. Come si vedrà in seguito, tassi di sconto e d'interesse identici determinano interessi (in senso di remunerazioni assolute) differenti; per confrontare tassi di sconto e d'interesse è quindi necessario effettuare un'appropriata conversione.

Esempio 1.6. *Qual è l'importo incassato dal debitore alla presentazione di una cambiale per lo sconto bancario?*

Si consideri una cambiale dell'importo nominale di € 5,000 con scadenza il 12/05/2023, presentata all'incasso presso un istituto bancario il 22/02/2023. Il tasso di sconto praticato è $d(22/02/2023, 12/05/2023) = 0.50\%$ con base di calcolo **E30/360**, corrispondente alla convenzione commerciale.

Con riferimento alla base adottata, il numero di giorni intercorrenti tra le due date è pari a 80. La frazione di anno da utilizzare nel calcolo è pertanto:

$$\frac{\tau}{n} = \frac{80}{360} = 0.222.$$

Gli interessi (sconto) da dedurre dal valore facciale del titolo sono:

$$D(0, 80) = C \times d(t, s) \times \frac{\tau}{n} = € 5,000 \times 0.005 \times 0.222 = € 5.56.$$

L'importo effettivamente incassato dal debitore è quindi:

$$€ (5,000 - 5.56) = € 4,994.44.$$

Si assume che, per frazioni di anno, il tasso di sconto sia proporzionale alla durata del periodo, ossia:

$$d_{\tau}(t, s) = d(t, s) \times \frac{\tau}{n}.$$



Come nelle o.f. di interesse semplice, nelle o.f. di sconto valgono le equivalenze finanziarie (1.1) e (1.2). Sostituendo la (1.1) nella (1.15), si ha

$$d_{\tau}(t, s) = \frac{V(s) - V(t)}{V(s)} = \frac{V(t)[M(t, s) - 1]}{V(t)M(t, s)} = 1 - B(t, s).$$

Si osservi che i fattori $M(t, s)$ e $B(t, s)$ svolgono la stessa funzione riscontrata per l'interesse semplice: il primo è un fattore montante, mentre il secondo è un fattore di sconto. Purtroppo la terminologia può creare confusione e si tende a confondere il tasso di sconto con il fattore di sconto. La distinzione da cogliere è che un fattore di sconto serve a "spostare" indietro un capitale esigibile alla scadenza dell'o.f. e questo è possibile utilizzando sia un tasso d'interesse sia un tasso di sconto.

Esempio 1.7.

Determinare il valore attuale e il costo di un finanziamento ottenuto mediante l'emissione di una cambiale finanziaria.

Una società di import/export necessita di liquidità immediata per finanziare l'acquisto di merce. Fra tre settimane riceverà € 1,000,000 derivante dalla vendita di prodotti, che le consentirà di estinguere il debito contratto.

Per coprire il fabbisogno temporaneo, il tesoriere richiede a una banca l'emissione di una **cambiale finanziaria** con durata di 21 giorni. Il tasso di sconto di mercato su base annua è $d(0, 21) = 4.5\%$ [Act/360]. Poiché il valore nominale dell'operazione è € 1,000,000, alla scadenza l'impresa rimborserà l'intero valore facciale al portatore del titolo.

Il valore dello sconto semplice è dato da:

$$D(0, 21) = € 1,000,000 \times 0.045 \times \frac{21}{360} = € 2,625.$$

Il valore attuale della cambiale finanziaria risulta quindi:

$$V(0) = V(s) - D(0, 21) = € (1,000,000 - 2,625) = € 997,375.$$

L'importo di € 997,375 rappresenta la somma che la società riceve immediatamente dalla banca per far fronte alle esigenze di liquidità.

Alla scadenza, dopo tre settimane, l'impresa rimborserà € 1,000,000, sostenendo un costo complessivo pari allo sconto:

$$\text{Costo dell'operazione} = D(0, 21) = € 2,625.$$

Il portatore della cambiale finanziaria potrebbe volersi disfare del titolo acquistato prima della scadenza naturale dell'o.f. Il mercato secondario soddisfa tale necessità e, se il mercato è liquido, il portatore potrà vendere il titolo senza sostenere costi aggiuntivi.

Esempio 1.8. *Determinare il guadagno realizzato dal portatore di una cambiale finanziaria che la rivende sul mercato secondario prima della scadenza.*

Il portatore della cambiale finanziaria dell'Esempio 1.6 decide di venderla dopo 10 giorni. Il titolo era stato acquistato al prezzo di € 997,375. Si supponga che il tasso di sconto di mercato sia rimasto invariato.

Poiché mancano 11 giorni alla scadenza ($21 - 10 = 11$), il valore della cambiale sul mercato secondario è dato da:

$$D(0, 11) = € 1,000,000 \times 0.045 \times \frac{11}{360} = € 1,375$$

$$V(0) = € (1,000,000 - 1,375) = € 998,625$$

Chi acquista la cambiale dovrà quindi pagare € 998,625. Il guadagno per il venditore è pari a:

$$€ (998,625 - 997,375) = € 1,250$$

Tale importo rappresenta il reddito maturato in 10 giorni di possesso del titolo, analogo al *rateo cedolare* dei BTP. Tuttavia, mentre nel caso dei BTP il tasso cedolare è fisso, per le cambiali finanziarie il tasso di sconto di mercato può variare anche nel breve periodo.

Effetto delle variazioni del tasso di sconto.

Se il tasso di sconto aumenta di 20 punti base (da 4.5% a 4.7%), si ottiene:

$$D(0, 11) = € 1,000,000 \times 0.047 \times \frac{11}{360} = € 1,436.11$$

$$V(0) = € (1,000,000 - 1,436.11) = € 998,563.89$$

Il guadagno per il portatore si riduce quindi a:

$$€ (998,563.89 - 997,375) = € 1,188.89$$

Viceversa, una riduzione di 20 punti base (tasso di sconto 4.3%) determina:

$$€ (998,686.11 - 997,375) = € 1,311.11$$

Questo semplice esercizio evidenzia il **rischio di tasso d'interesse**: un aumento dei tassi riduce il valore del titolo, mentre una diminuzione lo incrementa. Nel caso estremo in cui il tasso di sconto salisse fino all'8.59% (un balzo di 409 bp in soli 10 giorni), il guadagno dell'operazione si annullerebbe completamente. ■

1.4 Approfondimento

Tassi di interesse negativi

In alcuni contesti economici e finanziari può risultare razionale acquistare titoli di Stato con **rendimento a scadenza nominale negativo**, cioè un rendimento certo e noto al momento dell'acquisto. Tale situazione si verifica tipicamente in fasi storiche caratterizzate da politiche monetarie espansive e da tassi ufficiali prossimi o inferiori a zero, come accaduto in Europa a partire dalla metà degli anni 2010. In queste circostanze, la detenzione di liquidità presso le banche centrali comporta per gli istituti di credito un costo, poiché i depositi eccedenti le riserve obbligatorie sono soggetti a tassi negativi. Le banche commerciali, a loro volta, possono trasferire parte di questo onere sui clienti con elevati livelli di liquidità, applicando tassi negativi sui depositi.

In tale contesto, l'investimento in titoli di stato a rendimento certo ma negativo può risultare economicamente conveniente: la perdita garantita derivante dal titolo è spesso inferiore al costo di mantenere la liquidità in giacenza. Inoltre, per banche, compagnie assicurative e fondi pensione, la normativa prudenziale (Basilea III, Solvency II e simili) impone di detenere

una quota significativa del capitale in attività prive di rischio, tipicamente titoli sovrani. Anche in presenza di rendimenti negativi, tali strumenti restano quindi indispensabili ai fini regolamentari e della gestione della liquidità.

In sintesi, l'investimento in titoli di stato a rendimento negativo non implica necessariamente una scelta irrazionale: riflette piuttosto un equilibrio tra sicurezza, vincoli regolamentari, costo della liquidità e aspettative macroeconomiche. In determinati scenari, “perdere poco” può essere una forma di rendimento.

INFORMAZIONI STRUMENTO	
Codice ISIN	IT0003934657
Emittente	Ministero dell'Economia e delle Finanze
Tipologia	Titoli di Stato italiani
Ammontare emesso	27,890,758,000
Lotto minimo	1,000
Mercato	MOT
Data inizio negoziazione	14/10/2005
Denominazione	BTP 4% 01/02/2037
Data godimento	01/08/2005
Prima cedola	01/02/2006
Ultima cedola pagata	01/02/2023
Scadenza	01/02/2037
Periodicità cedola	Semestrale
Modalità negoziazione	Corso secco
Base di calcolo	ACT/ACT
Tasso prossima cedola	2.00

DATI DI MERCATO	
Prezzo ufficiale	96.0406
Data prezzo ufficiale	15/05/2023
Apertura	96.29
Volume ultimo	5,000
Volume totale	19,418,000
Numero contratti	529

RENDIMENTI	
Rendimento effettivo lordo	4.34
Rendimento effettivo netto	3.91
Rateo lordo	1.16022
Rateo netto	1.01519
Duration modificata	10.05
Prezzo di riferimento	96.05
Data di riferimento	15/05/2023

Cedola: interessi annui lordi del 4% del valore nominale, pagati semestralmente l'1 febbraio e l'1 agosto a partire dall'1 febbraio 2006.

Tabella 1.2: Scheda descrittiva del BTP 4% 01/02/2037 al 15/05/2023. ISIN IT0003934657. Fonte: <http://www.borse.it/quotazioni/obbligazioni/btp>.

EURIBOR				EUR IRS		
TENOR	FIXING	PREV.	FIXING 365	TENOR	FIXING	PREV.
1M	2.915%	2.921%	2.955%	1Y	3.61%	3.60%
3M	3.038%	3.052%	3.080%	2Y	3.44%	3.44%
6M	3.341%	3.312%	3.387%	3Y	3.29%	3.29%
12M	3.622%	3.568%	3.672%	4Y	3.15%	3.17%
				5Y	3.07%	3.10%
				6Y	3.03%	3.06%
				7Y	3.00%	3.04%
				8Y	2.99%	3.03%
				9Y	2.99%	3.03%
				10Y	2.99%	3.04%
				11Y	3.02%	3.05%
				12Y	3.02%	3.04%
				15Y	3.01%	3.05%
				20Y	2.87%	2.90%
				25Y	2.70%	2.72%
				30Y	2.55%	2.56%
				40Y	2.32%	2.34%
				50Y	2.15%	2.18%

Tabella 1.3: *Tassi EURIBOR ed EUR IRS al 31/03/2023. Fonte:* <http://www.ilsole24ore.com/finanza-e-mercati/tassi-e-valute.shtml>

Capitolo 2

Modelli di interesse

2.1 Valore attuale e futuro

Nell'Esempio 1.1, il depositante, a fronte di un versamento iniziale di capitale, ottiene gli interessi pattuiti al termine del periodo di impiego.

Nell'Esempio 1.2, il possessore del BTP, che ha sostenuto un esborso iniziale per l'acquisto del titolo e ha quindi immobilizzato il proprio capitale per un determinato intervallo di tempo, percepisce gli interessi previsti per l'intera durata di detenzione del titolo.

Da un punto di vista economico, gli interessi rappresentano la remunerazione per aver rinunciato, nel presente, a una certa quantità di consumo, posticipandolo a un momento futuro. Essi compensano l'investitore per il vincolo temporale imposto al capitale e per l'incertezza associata al trascorrere del tempo.

Da un punto di vista matematico, tale equivalenza si traduce nella (1.1), dove il *fattore montante*, $M(t, s)$, descrive l'accrescimento del capitale iniziale $V(t)$ nell'intervallo temporale $[t, s]$.

Come mostrato negli esempi precedenti, fissato il capitale iniziale e noto il tasso d'interesse (o di sconto), l'ammontare degli interessi dipende unicamente dall'ampiezza $\tau = s - t$ dell'intervallo di tempo di durata dell'operazione finanziaria.

Un modello matematico per $M(t, s)$, ossia una formula che, dato il capitale iniziale $V(t)$, ne determini il valore futuro $V(s)$, deve quindi essere

una funzione di due variabili che rifletta esplicitamente la dipendenza dall'intervallo temporale di impiego del capitale.

Ne consegue che modelli del tipo

$$M(t, s) = 1 + i(t^2 + s^2) \quad (2.1)$$

oppure

$$M(t, s) = e^{i(t+3s)}, \quad (2.2)$$

sono da escludere, poiché l'intervallo temporale d'impiego del capitale, $\tau = s - t$, non compare esplicitamente nella formulazione.

Nella definizione di un modello per $M(t, s)$ è inoltre necessario tener conto di due aspetti fondamentali:

- il parametro τ misura la durata dell'intervallo temporale e deve pertanto essere espresso nella stessa unità di misura del tempo utilizzata per il tasso d'interesse i ;
- la scelta del modello matematico da adottare per il calcolo degli interessi non è oggettiva, ma deriva dagli accordi contrattuali tra le parti: è infatti l'intesa fra creditore e debitore a stabilire il modello finanziario da applicare, e non l'operazione finanziaria in sé.

2.2 Il modello lineare d'interesse

Un modello per $M(t, s)$, che rispetti le proprietà individuate per il parametro τ , può essere definito introducendo il tasso d'interesse relativo al periodo d'impiego τ , indicato con $i_\tau(t, s)$, come:

$$i_\tau(t, s) = i(t, s) \times \frac{s - t}{n}. \quad (2.3)$$

Combinando (1.9) con (2.3) si ottiene:

$$M(t, s) = 1 + i_\tau(t, s) = 1 + i(t, s) \times \frac{s - t}{n}. \quad (2.4)$$

Un modello di questo tipo implica che, fissato il parametro $i(t, s)$ — tasso d'interesse espresso su base annuale, semestrale, trimestrale, mensile o giornaliera — il fattore montante per un'o.f. di durata $(s - t)$ si ottiene sommando all'unità di capitale il prodotto tra il tasso $i(t, s)$ e il rapporto

$(s - t)/n$. Quest'ultimo rappresenta la durata dell'o.f. espressa nella stessa unità temporale in cui è definito il tasso d'interesse.

In altri termini, la durata $(s - t)$ dell'o.f. deve essere coerente con l'unità di misura del tempo a cui si riferisce il tasso $i(t, s)$. Se, ad esempio, il tasso è annuale, la durata dovrà essere espressa in anni (o frazioni d'anno); se il tasso è mensile, la durata dovrà essere espressa in mesi (o frazioni di mese).

Nella (2.3) tale coerenza è garantita dal rapporto $(s - t)/n$, dove n indica la misura temporale di riferimento del tasso d'interesse, espressa nella stessa unità di $s - t$. Se $s - t$ è espresso in semestri, anche n sarà espresso in semestri; se $s - t$ è espresso in giorni, n sarà espresso in giorni. Il rapporto $(s - t)/n$ risulta quindi un numero adimensionale: maggiore di uno quando la durata dell'intervallo $[t, s]$ supera l'unità temporale del tasso $i(t, s)$, e minore di uno nel caso contrario.

La (2.4) prende il nome di **modello di capitalizzazione ad interesse semplice**, anche detto **modello lineare d'interesse**.

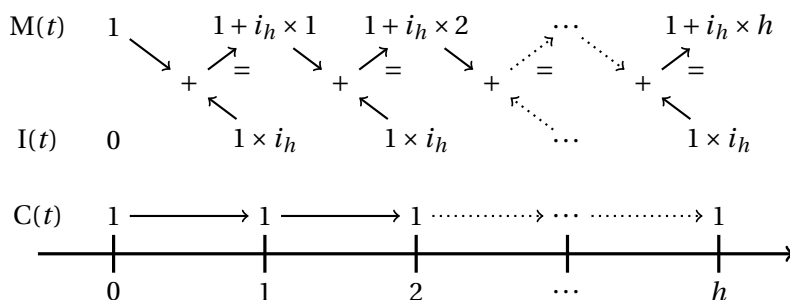


Figura 2.1: Rappresentazione grafica del meccanismo di formazione del montante nel modello lineare d'interesse.

Le ragioni di tale denominazione risiedono nella forma **lineare** della funzione che descrive il fattore montante $M(t, s)$.

Ponendo $\tau = s - t$, si ottiene:

$$M(\tau) = 1 + i(t, s) \frac{\tau}{n}, \quad (2.5)$$

in cui $M(\tau)$ è una funzione lineare di τ , con pendenza pari a i e intercetta $M(0) = 1$.

t	$M(t)$
0	1
1	$1 + i_h \times (1 - 0) = 1 + i_h \times 1$
2	$(1 + i_h \times 1) + i_h \times (2 - 1) = 1 + i_h \times 2$
3	$(1 + i_h \times 2) + i_h \times (3 - 2) = 1 + i_h \times 3$
...	...
h	$[1 + i_h \times (h - 1)] + i_h \times (h - h + 1) = 1 + i_h \times h$

Tabella 2.1: *Tabella riassuntiva del meccanismo di formazione del montante nel modello lineare d'interesse.*

La (2.4) e, conseguentemente, la (2.5), rappresentano il risultato di un preciso meccanismo di maturazione degli interessi sul capitale investito. Nel regime dell'interesse semplice, infatti, gli interessi maturati alla fine di ogni periodo diventano *infruttiferi*: vengono cioè separati dal capitale, che rimane investito e continua a produrre interessi solo su se stesso per l'intero periodo successivo.

La Figura 2.1 e la Tabella 2.1 illustrano il processo di formazione del montante di un capitale unitario nel regime dell'interesse semplice. Fissato un tasso d'interesse periodale costante i_h , il montante prodotto da un capitale unitario, $C = 1$, alla fine di h periodi d'impiego, risulta pari a:

$$M(h) = 1 + i_h \times h, \quad (2.6)$$

che rappresenta il modello matematico espresso dalle formule (2.4) e (2.5).

In generale, data la relazione (2.5), il valore futuro $V(s)$ di un capitale iniziale $V(t)$, impiegato nel RIS per un periodo di durata τ , è dato da:

$$V(s) = V(t) \left[1 + i(t, s) \times \frac{\tau}{n} \right], \quad (2.7)$$

dove $s = t + \tau$.

Affinché il rapporto τ/n sia coerente, è necessario che numeratore e denominatore siano espressi nella stessa unità temporale (giorni/giorni, mesi/mesi, ecc.).

Con semplici passaggi algebrici, la (2.7) può essere riscritta in modo che il tasso d'interesse sia espresso nella stessa unità di misura del tempo τ — ad esempio tasso mensile e durata in mesi.

La logica da seguire è analoga a quella utilizzata per la conversione dei tassi con basi temporali differenti.

L'obiettivo è determinare il tasso i_n , ossia il tasso relativo a un $1/n$ -esimo di periodo, tale che il valore futuro di $V(t)$, capitalizzato al tasso i_n per τ sotto-periodi (o frazioni di periodo), coincida con quello ottenuto capitalizzando $V(t)$ al tasso i , riferito all'intero periodo (mese, trimestre, semestre, anno, ecc.), per τ/n sotto-periodi.

Deve quindi valere la relazione:

$$[1 + i_n(t, s) \times \tau] = \left[1 + i(t, s) \times \frac{\tau}{n} \right], \quad (2.8)$$

da cui si ricava:

$$i_n(t, s) = \frac{i(t, s)}{n}. \quad (2.9)$$

Esempio 2.1. *Determinare il valore minimo a scadenza di un investimento con garanzia del capitale e rendimento minimo dell'8% dopo 4 anni.*

Un istituto bancario italiano propone un prodotto finanziario con la formula “*Garanzia del capitale + rendimento minimo dell'8% dopo 4 anni*”. Si investono € 100,000 nel prodotto e si desidera calcolare il valore minimo dell'investimento alla scadenza.

La garanzia del capitale implica la restituzione integrale dell'importo inizialmente versato, quindi:

$$V(0) = € 100,000, \quad V(4) \geq € 100,000.$$

Il rendimento minimo dichiarato è pari all'8% ogni 4 anni: il periodo d'impiego è dunque $\tau = 1$ quadriennio, e il tasso d'interesse $i = 8\%$ si riferisce allo stesso intervallo temporale.

Applicando la formula del valore futuro:

$$V(4) = € 100,000 \times \left(1 + 0.08 \times \frac{4}{4} \right) = € 108,000.$$

Pertanto, il valore minimo garantito dell'investimento alla scadenza quadriennale è pari a € 108,000. ■

Esempio 2.2. *Determinare il valore di liquidazione di un titolo dopo due anni e sette mesi di possesso, in un contratto che prevede un tasso d'interesse quadriennale.*

Si consideri il prodotto finanziario descritto nell'Esempio 2.1. Dopo due anni e sette mesi, il sottoscrittore decide di liquidare la propria posizione vendendo il titolo sul mercato (ammesso che ciò sia possibile, poiché per prodotti di questo tipo spesso non esiste un mercato secondario).

L'investitore ha diritto agli interessi maturati per il periodo di detenzione. È quindi necessario determinare la frazione di quadriennio a cui tale periodo corrisponde.

Poiché il tasso d'interesse è espresso su base quadriennale, anche la durata del possesso deve essere espressa nella stessa unità temporale. Il periodo di due anni e sette mesi equivale a 31 mesi, mentre un quadriennio corrisponde a $n = 48$ mesi. Pertanto:

$$\frac{\tau}{n} = \frac{31}{48} = 0.64583 \text{ quadrienni.}$$

Applicando la relazione (2.7), il valore di liquidazione del titolo è:

$$V(s) = € 100,000 \times (1 + 0.08 \times 0.64583) = € 105,166.67.$$

L'importo ottenuto rappresenta il valore che l'investitore può realizzare dopo due anni e sette mesi di possesso, assumendo che il tasso quadriennale rimanga invariato e che la vendita sia possibile alle stesse condizioni di mercato dell'emissione. ■

Con riferimento all'Esempio 2.1, il tasso annuale $i_{\frac{1}{4}}(0,4)$ finanziariamente equivalente al tasso quadriennale $i(0,4)$ si ottiene dalla (2.9) come:

$$i_{\frac{1}{4}}(0,4) = \frac{i(0,4)}{4} = \frac{0.08}{4} = 0.02 = 2\%. \quad (2.10)$$

Nell'Esempio 2.1, il periodo temporale di riferimento (base) del tasso $i(0,4)$ è pari a 4 anni, mentre $1/4$ rappresenta la frazione di tale periodo. Il tasso $i_{\frac{1}{4}}(0,4)$ è quindi, per costruzione, il tasso su base annua

corrispondente a un'operazione di durata compresa tra 0 e 4 anni.

Nell'Esempio 2.2, la durata dell'operazione, espressa in anni, è pari a:

$$\tau = 2 + \frac{7}{12} = 2.583,$$

per cui il valore garantito dopo due anni e sette mesi risulta:

$$V(2.583) = V(0) \left[1 + i_{\frac{1}{4}}(0, 4) \times \tau \right] = \text{€}100,000(1 + 0.02 \times 2.583) = \text{€}105,166.67.$$

Si osservi che il tasso $i_{\frac{1}{4}}(0, 4)$ è espresso su base annuale; di conseguenza, la durata dell'impiego del capitale, pari a due anni e sette mesi, risulta superiore a un anno, e il parametro τ assume quindi un valore maggiore di uno.

Quando il tasso $i(t, s)$ e l'ampiezza dell'intervallo temporale $\tau = s - t$ sono espressi nella stessa unità di misura del tempo, poiché $s = t + \tau$, la (2.7) può essere riscritta nella forma semplificata:

$$V(t + \tau) = V(t) \left[1 + i(t, s) \times \tau \right]. \quad (2.11)$$

Il modello di capitalizzazione semplice descritto dalla (2.11) stabilisce l'equivalenza temporale tra due quantità di denaro disponibili in istanti diversi: $V(t)$ unità di capitale in t sono equivalenti a $V(t + \tau)$ unità di capitale in $t + \tau$.

Questo modello consente dunque di “traslare in avanti” il valore del capitale disponibile all'istante t fino all'epoca $t + \tau$, ossia $t \rightarrow t + \tau$.

Nel caso in cui $V(t) = 1$, cioè per un capitale iniziale unitario, il **valore futuro** è dato da:

$$V(t + \tau) = M(t, t + \tau) = \frac{1}{B(t, t + \tau)}. \quad (2.12)$$

Dalla (2.12) si deduce che ogni unità di capitale disponibile in t “costerà” $M(t, t + \tau) = 1/B(t, t + \tau)$ unità di capitale all'istante $t + \tau$.

Utilizzando lo stesso schema è possibile definire un modello per *spostare all'indietro* ($t \leftarrow t + \tau$) un capitale disponibile in $t + \tau$.

In particolare, se in $t + \tau$ è disponibile un'unità di capitale, dalla (2.11) si ottiene:

$$V(t) = \frac{1}{M(t, t + \tau)} = B(t, t + \tau), \quad (2.13)$$

da cui segue che un'unità di capitale disponibile in $t + \tau$ "costa" $B(t, t + \tau) = 1/M(t, t + \tau)$ unità di capitale in t .

Il fattore $B(t, t + \tau)$ rappresenta dunque il **valore attuale** di un'unità di capitale esigibile in $t + \tau$.

In generale, per determinare il valore attuale di un capitale $V(s)$ disponibile in s , è sufficiente applicare l'operatore di sconto $B(t, s)$, definito come reciproco del fattore montante: $B(t, s) = 1/M(t, s)$.

Nel caso della capitalizzazione semplice, si ottiene pertanto:

$$V(t) = \frac{V(s)}{1 + i(t, s) \times \frac{\tau}{n}}, \quad (2.14)$$

e il corrispondente **fattore di sconto** risulta:

$$B(t, s) = \frac{1}{M(t, s)} = \frac{1}{1 + i(t, s) \times \frac{\tau}{n}}, \quad (2.15)$$

con $\tau = s - t$.

In termini applicativi, la capitalizzazione semplice viene di norma impiegata per o.f. con scadenza non superiore a un anno. Tuttavia, non esiste una regola generale per stabilire quale regime di capitalizzazione adottare: la scelta dipende dagli **accordi contrattuali** tra le parti, che determinano liberamente la legge finanziaria da utilizzare.

2.2.1 I Buoni Ordinari del Tesoro (BOT)

I **Buoni Ordinari del Tesoro (BOT)** rappresentano un tipico esempio di titoli a breve termine, appartenenti alla categoria degli strumenti del mercato monetario.

Con l'acquisto di un BOT si entra in un'o.f. *spot*, nella quale, a fronte del pagamento in t di un importo $V(t) < 1$ euro, si ottiene $V(s) = 1$ euro alla scadenza s .

Nel caso di un BOT con valore facciale unitario, il prezzo $V(t)$ pagato alla sottoscrizione rappresenta il **valore attuale** in t di un euro esigibile alla scadenza s ; in altri termini, coincide con il **fattore di sconto** di un'o.f. a pronti:

$$P = V(t) = B(t, s), \quad (2.16)$$

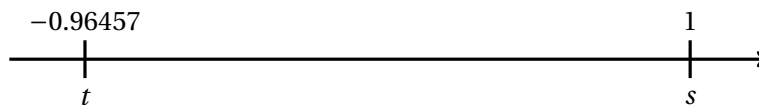


Figura 2.2: *Flusso di cassa, per euro di valore facciale, di un investitore che acquista il BOT ISIN IT0005537094.*

dove, in letteratura, il prezzo di un titolo a cedola nulla unitario è indicato con diverse notazioni, fra cui $P(t, s)$, $B(t, s)$ o $v(t, s)$ ¹.

Le quotazioni dei titoli a reddito fisso sono sempre espresse in percentuale del loro valore facciale. Nel caso di un BOT, il pagamento del prezzo P dà diritto a ricevere a scadenza il 100% del valore facciale (€1,000, dal 4 gennaio 1999).

Il rendimento del BOT deriva esclusivamente dal **guadagno in conto capitale** (*capital gain*) — o, eventualmente, dalla **perdita in conto capitale** (*capital loss*) — poiché il titolo non prevede il pagamento di cedole periodiche.

Per questa caratteristica, il BOT appartiene alla categoria dei titoli a reddito fisso denominati **titoli a cedola nulla** (TCN) o, nella terminologia anglosassone, **zero coupon bond** (ZCB).

La Tabella 2.2 riporta i risultati dell'asta dei BOT a 12 mesi collocati in data 10/03/2023–13/03/2023². Il titolo, identificato dal codice ISIN IT0005537094, quota a 96.457, con scadenza fissata al 14/03/2024.

Il numero di giorni compresi tra la data di regolamento e la scadenza è pari a 366 (dal 14/03/2023 al 14/03/2024).

Il prezzo $P = 96.457$ indica che, per l'acquisto di un BOT, l'investitore dovrà pagare il 96.457% del valore facciale, ossia $€1,000 \times 96.457/100 = €964.57$, per ricevere alla scadenza l'intero valore nominale del titolo, pari a €1,000.

Il **rendimento lordo composto** riportato nella Tabella 2.2 è pari al 3.612% su base 360. Di seguito si descrive il metodo utilizzato per

¹Le diverse notazioni sono equivalenti: $P(t, s)$ indica il prezzo in t di un titolo a scadenza s ; $B(t, s)$ è comunemente usato nei modelli per la struttura a termine dei tassi d'interesse; $v(t, s)$ enfatizza la natura di fattore di attualizzazione.

²Fonte: Ministero dell'Economia e delle Finanze,
https://www.dt.mef.gov.it/debito_pubblico/emissioni_titoli_di_stato_interni/risultati_aste/risultati_aste_bot_12_mesi/index.html

BOT A 12 MESI – RISULTATI DELL'ASTA	
ISIN	IT0005537094
Durata	366 giorni
Data emissione	14/03/2023
Data scadenza	14/03/2024
Data asta	10/03/2023
Data regolamento	14/03/2023
Importo offerto	6,500
Importo richiesto	9,190
Importo assegnato	6,500
Prezzo medio	96.457
Rendimento medio	3.613%
Rendimento massimo	3.620%
Rendimento minimo	3.606%
Rendimento lordo composto	3.612%

Tabella 2.2: Risultati dell'asta dei BOT annuali del 10 marzo 2023. Gli importi sono espressi in milioni di euro. I rendimenti sono calcolati su base Act/360.

determinarlo.

Per semplificare l'analisi, il prezzo è espresso in unità di valore facciale, quindi $P = 96.457/100 = 0.96457$. L'operazione è rappresentata graficamente nella Figura 2.2.

Applicando la (2.7) e sostituendo a $V(t)$ e $V(s)$ i rispettivi valori, l'unica incognita dell'equazione è il tasso d'interesse su base annuale. Si ha dunque:

$$1 = B(t, s) \left[1 + i(t, s) \times \frac{\tau}{n} \right], \quad (2.17)$$

da cui

$$i(t, s) = \frac{[1 - B(t, s)] \times n}{B(t, s) \times \tau}. \quad (2.18)$$

Il tasso espresso nella (2.18) rappresenta il **tasso annuale finanziariamente equivalente** al tasso i_τ relativo al periodo di impiego $\tau = s - t$:

$$i_\tau(t, s) = \frac{[1 - B(t, s)]}{B(t, s)}, \quad (2.19)$$

secondo la relazione

$$i(t, s) = i_\tau(t, s) \times \frac{n}{s - t} = i_\tau(t, s) \times \frac{n}{\tau}. \quad (2.20)$$

Con riferimento al BOT ISIN IT0005537094, il tasso lordo su base 366 giorni, riportato in Tabella 2.2, si ottiene dalla formula:

$$i_{366}(14/03/2023, 14/03/2024) = \frac{1 - 0.96457}{0.96457} = 0.03673,$$

da cui

$$i_{360}(14/03/2023, 14/03/2024) = i_{366}(14/03/2023, 14/03/2024) \times \frac{360}{366} = 0.03612.$$

Il rendimento del BOT è soggetto all'imposta sostitutiva sui titoli di stato del 12.50%, calcolata sul disaggio di emissione, ossia sulla differenza tra il valore nominale (valore di rimborso) e il prezzo di emissione.

Per ottenere il prezzo netto si aggiunge al prezzo lordo l'imposta calcolata sul disaggio di emissione, secondo la formula:

$$imp = [1 - B(t, s)] \times 0.1250 \times \frac{\tau}{n}. \quad (2.21)$$

Indicando con $B^*(t, s)$ il prezzo netto e con $i^*(t, s)$ il rendimento netto, si ha:

$$B^*(t, s) = B(t, s) + imp, \quad (2.22)$$

$$i^*(t, s) = \frac{1 - B^*(t, s)}{B^*(t, s)} \times \frac{n}{\tau}. \quad (2.23)$$

Per il titolo in esame si ottiene:

$$imp = (1 - 0.96457) \times 0.1250 \times \frac{360}{366} = 0.00435,$$

da cui

$$B^*(t, s) = 0.96457 + 0.00435 = 0.96892. \quad (2.24)$$

Il calcolo del rendimento netto per il titolo in esame è lasciato al lettore come esercizio.

È importante chiarire che il BOT **non è un titolo di sconto**. Sebbene sia emesso a un valore inferiore al prezzo di rimborso (emissione sotto la pari), gli interessi vengono corrisposti alla scadenza e sono calcolati sull'importo monetario iniziale. Titoli di puro sconto sono invece i T-Bill statunitensi.

La quotazione del BOT influisce direttamente sul rendimento del titolo. Per la loro breve durata — non superiore a un anno — e per l'affidabilità dell'ente emittente, lo Stato italiano, tramite il Ministero dell'Economia e delle Finanze, i BOT sono considerati titoli privi di rischio. Il loro rendimento, in particolare quello dei BOT trimestrali, è comunemente assunto come **tasso privo di rischio o tasso a breve termine** (*risk-free rate o short rate*).

Dopo l'assegnazione sul Mercato Telematico dei Titoli di Stato (MTS), riservata agli investitori istituzionali (banche, SIM, intermediari finanziari), la contrattazione dei BOT prosegue sul Mercato Telematico delle Obbligazioni (MOT).

In tale sede, le quotazioni telematiche consentono l'incontro tra domanda e offerta, determinando il prezzo corrente di ciascun titolo di stato in circolazione.

Sebbene il rendimento dei BOT sia generalmente considerato un tasso privo di rischio — in quanto il rischio di mancato rimborso da parte dello Stato è ritenuto trascurabile, anche in considerazione della loro breve durata — tali titoli restano esposti al **rischio di mercato**, ossia al rischio che il prezzo del titolo possa variare dopo l'acquisto.

L'Esempio 2.3 illustra questo aspetto in modo puntuale.

Esempio 2.3. *Determinare il rendimento su base annua (ACT/ACT) di un BOT venduto 304 giorni dopo l'acquisto.*

In data 12/01/2024, ossia 304 giorni dopo l'acquisto, il BOT con codice ISIN IT0005537094 ha una quotazione pari a $B(304, 366) = 0.99438$.

Se si decidesse di vendere il titolo in tale data, il rendimento effettivo

su base annua (con convenzione ACT/ACT) risulterebbe pari a:

$$\begin{aligned} h(0, 304) &= \frac{B(304, 366) - B(0, 366)}{B(0, 366)} \times \frac{366}{304} \\ &= \frac{0.99438 - 0.96457}{0.96457} \times \frac{366}{304} \\ &= 3.721\%. \end{aligned}$$

Nei 304 giorni successivi all'acquisto, la variazione del prezzo dei BOT sul mercato secondario determina un rendimento pari al 3.721%, superiore rispetto al 3.612% che si sarebbe ottenuto mantenendo il titolo fino alla scadenza. ■

La formula usata nell'Esempio 2.3 è del tipo:

$$h(t, t + \tau) = \frac{V(t + \tau, s) - V(t, s)}{V(t, s)} \times \frac{n}{\tau}, \quad (2.25)$$

e quantifica il rendimento dell'investimento noto come **rendimento periodale** o **holding period return**.

La formula (2.25) è formalmente identica alla (2.18), utilizzata per il calcolo del tasso $i(t, s)$; tuttavia, tra le due grandezze sussiste una differenza sostanziale. Il tasso $i(t, s)$ è noto al tempo t e rappresenta il rendimento realizzabile mantenendo il titolo fino alla scadenza, ossia il **rendimento a scadenza**. Al contrario, $h(t, t + \tau)$ è determinato soltanto al tempo $t + \tau$, in quanto dipende dal prezzo futuro $V(t + \tau, s)$, che risulta incerto al tempo t .

Si noti che $h(t, t + \tau)$ può anche essere negativo, al contrario di $i(t, s)$ che, tranne in circostanze particolari come quelle descritte nella Sezione 1.4, si mantiene positivo. Per i BOT, $h(t, t + \tau)$ è originato soltanto da variazioni in conto capitale (capital gain or capital loss).

Con riferimento al BOT ISIN IT0005537094 (Fig. 2.2), alla data di acquisto (14/03/2023) il rendimento lordo è pari al 3.612% su base 366. In altri termini, se si mantiene il possesso del titolo fino a scadenza, il rendimento certo è esattamente il 3.612%. Tale rendimento è relativo al periodo 14/03/23–14/03/24.

Nel caso fosse invece necessario effettuare un pagamento in data 12/01/2024 non sarebbe possibile utilizzare la (2.14) e scontare il BOT per un periodo inferiore ai 12 mesi ma, piuttosto, sarebbe necessario investire in un BOT (se esistente sul mercato) con scadenza il 12/01/2024.

In altri termini, ogni tasso è riferito ad un periodo ben definito. Per questo

motivo si fa riferimento a tassi con diverse scadenze — ad esempio a tre mesi, sei mesi o cinque anni — in funzione della durata dell'operazione finanziaria. In alternativa, le parti possono stabilire contrattualmente un tasso d'interesse e un modello di capitalizzazione che definisce il meccanismo di capitalizzazione o attualizzazione dei capitali esigibili in istanti diversi.

Con la vendita del titolo sul mercato il 12/01/2024, il rendimento dell'investimento legato al periodo di possesso del BOT (304 giorni su 366) passa al 3.721%.

Nei 304 giorni successivi all'acquisto del BOT, l'andamento delle condizioni di mercato e le aspettative degli investitori sui rendimenti futuri hanno prodotto variazioni nella quotazione del titolo sul mercato secondario. Tali variazioni di prezzo sono all'origine dell'aumento del rendimento realizzato nel periodo di possesso.

I titoli a cedola nulla di breve termine sono presenti in tutti i principali mercati monetari. Negli Stati Uniti prendono il nome di *Treasury bills* (*T-bills*), in Germania sono noti come *Bubills*, nel Regno Unito come *UK Treasury bills*, in Francia come *BTF* (*Bons du Trésor à taux fixe*), e in Spagna come *Letras del Tesoro*.

Esempio 2.4. *Determinare l'importo da investire in un BOT per ottenere un flusso di cassa di € 1,500,000 alla scadenza.*

Si ipotizzi che in data 14/03/2024 sia previsto il pagamento di € 1,500,000. In data 12/01/2024, il BOT con codice ISIN IT0005537094 (cfr. Tab. 2.2), con scadenza 14/03/2024, è quotato a 99.438.

Poiché il titolo è negoziato sotto la pari, per ottenere il flusso di cassa desiderato alla scadenza è necessario investire un capitale pari al valore attuale del BOT, calcolato come:

$$V(0) = € 1,500,000 \times \frac{99.438}{100} = € 1,491,570.$$

Pertanto, investendo € 1,491,570 al prezzo di mercato del 12 gennaio 2024, si otterrà alla scadenza del 14 marzo 2024 l'importo desiderato di € 1,500,000. Il rendimento implicito dell'operazione corrisponde al tasso di sconto applicato sul mercato per titoli di pari scadenza. ■

2.2.2 Prezzi e tassi a termine

Una o.f. che consente di fissare, già al momento della stipula dell'accordo, il tasso d'interesse — e, di conseguenza, il prezzo — applicabile in un'epoca futura, è detta **o.f. a termine (forward)**.

Il tasso d'interesse relativo ad una o.f. a termine si determina in modo analogo a quello di un'o.f. spot, con la sola differenza che il valore iniziale si riferisce a un periodo futuro T .

In particolare, dati tre istanti temporali $t \leq T < s$, il **tasso a termine** si ottiene da:

$$i_\tau(t, T, s) = \frac{V(s) - V(T)}{V(T)}. \quad (2.26)$$

Se $t = T$, si ottiene il tasso spot $i_\tau(t, s)$,

$$i_\tau(t, s) = \frac{V(s) - V(t)}{V(t)}. \quad (2.27)$$

Rispetto al tasso spot, è importante notare che, per il tasso forward, l'istante t non compare nel calcolo del tasso in quanto lo scambio di capitali avviene fra T ed s . Nel caso di ZCB unitari il tasso forward è dato da,

$$i_\tau(t, T, s) = \frac{1 - B(t, T, s)}{B(t, T, s)}, \quad (2.28)$$

con $\tau = s - T$. il tasso su base annuale è,

$$i(t, T, s) = i_\tau(t, T, s) \times \frac{n}{s - T} = i_\tau(t, T, s) \times \frac{n}{\tau} \quad (2.29)$$

Qui, $B(t, T, s)$ rappresenta il prezzo, in t , di uno ZCB unitario scambiato in T con scadenza in s . Inoltre, il tasso forward può essere interpretato come il tasso relativo a una o.f. spot nell'intervallo $[T, s]$. È importante sottolineare che il prezzo $B(t, T, s)$ non costituisce una previsione del prezzo futuro, bensì rappresenta un valore fissato oggi sulla base di accordi tra le parti. Infine, i prezzi e i tassi forward sono oggetto di contratti over-the-counter (OTC), stipulati su mercati informali o tramite semplici scritture private tra le parti.

2.2.3 Il Forward Rate Agreement (FRA)

Un **Forward Rate Agreement (FRA)** è un contratto utilizzato nel mercato monetario per proteggersi dal rischio di variazione dei tassi d'interesse. Esso

consente a un operatore economico di fissare in anticipo il tasso applicabile a un futuro investimento o finanziamento, neutralizzando così gli effetti di eventuali movimenti sfavorevoli dei tassi di mercato.

Il FRA è uno strumento **over-the-counter (OTC)**, ossia negoziato direttamente tra due controparti senza l'intermediazione di mercati regolamentati o camere di compensazione. Ciò implica l'assenza di alcuni meccanismi tipici dei mercati organizzati — come la standardizzazione contrattuale, la garanzia di una clearing house o la liquidazione giornaliera delle differenze di prezzo — che, se presenti, ridurrebbero il rischio di controparte e faciliterebbero l'incontro tra domanda e offerta.

Sebbene il FRA sia uno strumento *over-the-counter*, e quindi privo di una sede di negoziazione regolamentata, esistono comunque **quotazioni di mercato** diffuse da circuiti interbancari e piattaforme informative (Reuters, Bloomberg, ecc.).

Tali quotazioni non corrispondono a scambi effettivi su un mercato organizzato, ma rappresentano **tassi indicativi di riferimento**, calcolati come medie delle condizioni prevalenti nei contratti OTC stipulati tra le principali istituzioni finanziarie.

In questo modo, pur restando uno strumento personalizzabile e bilaterale, il FRA dispone di *prezzi di mercato* osservabili, utilizzati per la valutazione e la gestione delle posizioni in essere.

Generalmente, le parti coinvolte in un FRA sono un'impresa e la sua banca. Nella fase di negoziazione vengono concordati: l'ammontare del **capitale nozionale** (ossia il valore di riferimento del contratto), la **data di fixing** (decorrenza), la **data di scadenza** del contratto e il **tasso d'interesse di riferimento** (*settlement rate*). Quest'ultimo è solitamente un tasso chiave del mercato monetario, come l'EURIBOR per scadenze fino a 12 mesi o l'IRS per orizzonti temporali più lunghi.

Dal punto di vista operativo, alla data di fixing si determina la differenza tra il tasso di mercato vigente e il tasso fisso stabilito nel FRA. Tale differenza viene moltiplicata per il nozionale e per la durata del periodo di riferimento, e l'importo risultante viene scontato al tasso corrente di mercato. La somma così ottenuta viene regolata tra le parti nel modo seguente: se il tasso di mercato è superiore al tasso FRA, il **venditore** del contratto (che si era impegnato a pagare il tasso fisso) compenserà l'**acquirente**; viceversa, se

il tasso di mercato è inferiore, sarà l’acquirente a versare la differenza alla banca.

In questo modo l’impresa conosce in anticipo il costo effettivo del finanziamento, trasformando un tasso incerto in un tasso certo e ottenendo stabilità nei propri oneri finanziari. L’intervallo di tempo che intercorre tra la stipula del contratto e la data di fixing è detto *grace period*, poiché rappresenta il periodo durante il quale il soggetto si immunizza dalle future variazioni dei tassi d’interesse. La Tabella 2.3 mostra i tassi FRA alla data del 31/03/2025.

Tasso	30-03-2025	28-03-2025	27-03-2025	26-03-2025	25-03-2025
EUR FRA 0M x 3M	-	2.328%	2.355%	2.369%	2.365%
EUR FRA 0M x 6M	-	2.354%	2.379%	2.375%	2.386%
EUR FRA 1M x 4M	2.223%	2.226%	2.247%	2.266%	2.286%
EUR FRA 3M x 6M	2.102%	2.099%	2.127%	2.146%	2.172%
EUR FRA 6M x 9M	1.993%	1.988%	2.022%	2.055%	2.081%
EUR FRA 6M x 12M	2.042%	2.038%	2.075%	2.105%	2.135%
EUR FRA 6M x 15M	2.119%	2.114%	2.159%	2.184%	2.223%
EUR FRA 6M x 18M	2.197%	2.191%	2.244%	2.264%	2.311%
EUR FRA 12M x 15M	1.946%	1.940%	1.986%	2.012%	2.053%
EUR FRA 12M x 18M	2.003%	1.995%	2.053%	2.104%	2.150%

Tabella 2.3: Quotazioni dei tassi FRA (EUR FRAs) al 31/03/2025. Fonte: <https://www.teleborsa.it/Quotazioni/Tassi/Forward>.

Esempio 2.5. Determinare la somma liquidata su un contratto $FRA_{6 \times 12}$ stipulato da una società per coprirsi dal rischio di rialzo dei tassi.

Una società deve prendere in prestito tra sei mesi e prevede di restituire il capitale dopo ulteriori sei mesi; dunque, $T = 6$ e $s = 12$. Il tasso EURIBOR spot a sei mesi è pari al 2.354%.

Temendo un aumento dei tassi d’interesse, il tesoriere decide di coprire l’esposizione stipulando un contratto $FRA_{6 \times 12}$ al 2.042% (Tabella 2.3), per un nozionale di € 6,000,000.

Nella notazione del contratto, i due numeri in pedice indicano — in mesi — il tempo che manca alla data di fixing ($T = 6$) e la scadenza complessiva del contratto ($s = 12$).

Alla data di fixing:

- se il tasso EURIBOR di mercato risulta superiore al tasso FRA concordato, il compratore del FRA riceve la differenza, opportunamente attualizzata;
- se invece il tasso di mercato è inferiore, sarà l'acquirente a pagare la differenza al venditore.

Si ipotizzi che, alla data di fixing, il tasso EURIBOR a sei mesi sia cresciuto al 2.521%. La società si finanzia dunque a tale tasso di mercato, ma riceverà un rimborso pari alla differenza (attualizzata) fra il tasso effettivo e quello fissato nel contratto FRA.

Indicando con $\Lambda(T, s)$ l'importo liquidato alla data T , si ha:

$$\Lambda(T, s) = C \times \frac{[\text{EUR}(T, s) - \text{FRA}_{T \times s}] \times \tau}{n} \times \frac{1}{1 + \text{EUR}(T, s) \frac{\tau}{n}}. \quad (2.30)$$

Sostituendo i valori numerici nella (2.30), si ottiene:

$$\begin{aligned} \Lambda(T, s) &= \text{€ } 6,000,000 \times \frac{(0.02521 - 0.02042) \times 6}{12} \times \frac{1}{1 + 0.02521 \times \frac{6}{12}} \\ &= \text{€ } 14,191.12. \end{aligned}$$

La formula (2.30) mostra che la differenza tra il tasso $\text{FRA}_{6 \times 12}$ e il tasso di mercato $\text{EUR}(6, 12)$ viene **attualizzata** al tasso spot $\text{EUR}(6, 12)$, in quanto gli interessi maturano alla fine del periodo, ma vengono liquidati alla data di fixing.

Nell'Esempio 2.5, il **prezzo forward**, $B(t, T, s)$, rappresenta il valore attuale, al tempo T , di un euro esigibile in s , calcolato al tasso FRA fissato in t . In particolare:

$$B(t, T, s) = \left[1 + \text{FRA}_{6 \times 12} \times \frac{s-T}{n} \right]^{-1}.$$

Applicando i dati dell'esempio:

$$B(0, 6, 12) = \left(1 + 0.02042 \times \frac{6}{12} \right)^{-1} = 0.98989.$$

Acquistando il FRA, si fissa dunque il **prezzo a termine per ogni euro preso in prestito**. In questo caso, per ogni euro da restituire alla fine del periodo, la società riceve 0.98989 euro.

Se, alla data di fixing, il tasso di mercato $EUR(6, 12)$ — ossia il tasso effettivo al quale la società si finanzia — risulta pari al 2.521%, il valore di mercato diventa $B(6, 12) = 0.98755$.

La società sarà quindi compensata della differenza:

$$0.98989 - 0.98755 = 0.00403.$$

Se invece, alla data di fixing, i tassi correnti risultassero inferiori al tasso FRA, la società dovrebbe versare la differenza tra il prezzo a termine e il prezzo spot futuro, non beneficiando della riduzione dei tassi.

Rimane tuttavia il vantaggio di **conoscere anticipatamente il costo dell'operazione**, e quindi di poter pianificare in modo certo i flussi finanziari futuri.

Da questo esempio emerge chiaramente che i **tassi forward non rappresentano una previsione dei tassi futuri**. Essi riflettono soltanto le aspettative del mercato sui futuri livelli dei tassi, che possono anche non realizzarsi.

2.3 Il modello lineare di sconto

Negli esempi precedenti si è fatto riferimento al **modello dell'interesse semplice** per determinare il compenso (interesse) relativo alle o.f. considerate.

In tale contesto, i concetti di *valore attuale* e *valore futuro* sono stati associati al calcolo dell'interesse semplice.

In generale, un modello di capitalizzazione può essere costruito anche a partire da un **tasso di sconto**, e vi sono o.f. in cui tale tasso è determinato in modo intrinseco. In particolare, come illustrato nella Sezione 1.3, quando il compenso è rappresentato dagli interessi ottenuti dallo sconto di un capitale esigibile in s , l'ammontare $V(t)$ corrisponde al valore attuale, al tempo t , di $V(s)$ e risulta:

$$V(t) = V(s) \times B(t, s), \quad (2.31)$$

dove:

$$B(t, s) = 1 - d_\tau(t, s). \quad (2.32)$$

Definendo il **tasso di sconto sul periodo di riferimento** n (ad esempio l'anno) come:

$$d(t, s) = d_\tau(t, s) \times \frac{n}{\tau}, \quad (2.33)$$

si ottiene il **modello di sconto lineare**:

$$B(\tau) = 1 - d(t, s) \times \frac{\tau}{n}, \quad (2.34)$$

con $\tau = s - t$.

La (2.34) presenta le proprietà tipiche di un fattore di sconto $B(t, s)$. In particolare, $B(t, s) < 1$ e dunque $V(t) < V(s)$; inoltre, $B(\tau)$ è una funzione lineare dell'ampiezza dell'intervallo τ , con coefficiente angolare d e intercetta in $\tau = 0$ pari a 1.

Il valore, al tempo $t < s$, di un capitale $V(s)$ disponibile in s è pertanto espresso da:

$$V(t) = V(s) \left[1 - d(t, s) \times \frac{\tau}{n} \right]. \quad (2.35)$$

Dalla relazione tra fattore di sconto e fattore montante si ha:

$$M(\tau) = \frac{1}{B(\tau)} = \frac{1}{1 - d(t, s) \times \frac{\tau}{n}}, \quad (2.36)$$

che rappresenta il **fattore montante** nel caso in cui si utilizzi un tasso di sconto.

Il modello di capitalizzazione derivante dall'applicazione dell'operatore in (2.36) è noto come **modello di capitalizzazione a sconto semplice**:

$$V(t + \tau) = \frac{V(t)}{1 - d(t, s) \times \frac{\tau}{n}}. \quad (2.37)$$

Come accennato nella Sezione 1.3, nelle o.f. di sconto il tasso è calcolato rispetto al capitale finale $V(s)$, mentre, nel modello dell'interesse semplice, il tasso è calcolato rispetto al capitale iniziale $V(t)$.

Ciò implica che tassi di sconto e tassi d'interesse nominalmente identici producono interessi effettivi differenti. Di conseguenza, il valore attuale di un flusso attualizzato con $d(t, s)$ differisce da quello ottenuto utilizzando $i(t, s)$.

Per confrontare tassi di sconto e tassi d'interesse è necessario determinarne l'**equivalenza finanziaria**. La logica da seguire è analoga a quella adottata per la conversione dei tassi espressi su basi temporali diverse o con differente periodicità.

In particolare, un tasso di sconto e un tasso d'interesse si dicono **finanziariamente equivalenti** se producono lo stesso valore futuro (o, alternativamente, lo stesso valore attuale):

$$\left[1 + i(t, s) \times \frac{\tau}{n}\right] = \left[1 - d(t, s) \times \frac{\tau}{n}\right]^{-1},$$

da cui si ricavano le formule di conversione tra i due tassi:

$$i(t, s) = \frac{d(t, s)}{1 - d(t, s) \times \frac{\tau}{n}}, \quad (2.38)$$

$$d(t, s) = \frac{i(t, s)}{1 + i(t, s) \times \frac{\tau}{n}}. \quad (2.39)$$

Esempio 2.6. *Determinare il valore nominale di una cambiale finanziaria che consente all'impresa di ottenere una liquidità immediata pari a € 1,000,000, dato un tasso di sconto annuo del 4.5%.*

Nell'Esempio 1.7, la somma ricevuta dall'impresa rappresenta il valore attuale di € 1,000,000 da rimborsare dopo tre settimane. Dato il tasso di sconto annuo $d(t, s) = 4.5\%$ e applicando la relazione (2.35), si ottiene:

$$V(0) = € 1,000,000 \times \left(1 - 0.045 \times \frac{21}{360}\right) = € 997,375.$$

Si supponga ora che l'impresa necessiti di una disponibilità immediata di € 1,000,000. A quanto deve ammontare il valore nominale della cambiale finanziaria?

In questo caso è necessario determinare il valore futuro $V(t + \tau)$ tale che il suo valore attuale, scontato al tasso del 4.5%, sia pari a € 1,000,000. Non è possibile utilizzare il fattore montante del modello lineare d'interesse, poiché l'operazione è regolata da un tasso di sconto.

Pertanto, applicando il fattore montante del modello lineare di sconto:

$$V(t + \tau) = \frac{V(t)}{1 - d(t, s) \frac{\tau}{n}} = \frac{€ 1,000,000}{1 - 0.045 \times \frac{21}{360}} = € 1,002,631.91.$$

Il valore nominale della cambiale dovrà quindi essere pari a € 1,002,631.91, in modo che il suo valore attuale, al tasso di sconto del 4.5%, corrisponda a una disponibilità immediata di € 1,000,000. ■

Esempio 2.7. *Determinare quale delle due operazioni di finanziamento risulti più conveniente.*

Una società può scegliere tra le seguenti alternative di finanziamento:

1. emettere una cambiale finanziaria (c.f.) al tasso di sconto del 4.5% annuo, con estinzione dopo un anno;
2. contrarre un prestito al tasso EURIBOR a un anno, pari anch'esso al 4.5%.

Per un capitale nominale di 100 unità, nell'operazione (1) l'ammontare dello sconto è:

$$D = 100 \times 0.045 = 4.5.$$

Il valore attuale del titolo (ossia l'importo effettivamente incassato) è quindi:

$$V(0) = 100 \times (1 - 0.045) = 95.5.$$

Nell'operazione (2), l'importo degli interessi è:

$$I = 100 \times 0.045 = 4.5,$$

e il valore futuro del capitale da restituire risulta:

$$V(1) = 100 \times (1 + 0.045) = 104.5.$$

Sebbene in entrambi i casi l'importo nominale degli interessi sia identico, il costo effettivo del finanziamento differisce in modo significativo.

Il tasso d'interesse effettivo associato all'operazione di sconto è:

$$i = \frac{100 - 95.5}{95.5} = 0.047,$$

mentre il tasso di sconto effettivo per il prestito a interesse semplice è:

$$d = \frac{104.5 - 100}{100} = 0.045.$$

Pertanto, un tasso di sconto del 4.5% annuo risulta finanziariamente equivalente a un tasso d'interesse del 4.7% annuo. In altre parole, a parità di tasso nominale, un'operazione di sconto comporta un costo effettivo più elevato rispetto a un prestito a interesse semplice, poiché l'ammontare dello sconto è calcolato sul valore futuro e non sul capitale effettivamente ricevuto. ■

Esempio 2.8. *Confrontare la redditività di un T-Bill a 91 giorni e di un BOT con la stessa durata, assumendo che il rischio di cambio EUR/USD sia neutralizzato.*

Un T-Bill con scadenza a 91 giorni è quotato 99.2 [Act/360], mentre il rendimento di un BOT a 91 giorni è pari al 3.5% [Act/365]. Si desidera determinare quale dei due investimenti risulti più conveniente.

Il T-Bill è un *titolo di sconto*, poiché il prezzo è determinato sottraendo dal valore facciale gli interessi maturati e pagati anticipatamente. In altri termini, gli interessi sono corrisposti all'inizio del periodo.

Per un T-Bill con valore nominale unitario, il tasso di sconto risulta:

$$d_{\text{T-Bill}}(0, 91) = (1 - 0.992) \times \frac{360}{91} = 0.0316.$$

Il rendimento dei BOT è invece espresso come tasso d'interesse posticipato. Per confrontare correttamente i due strumenti, è necessario convertire il tasso d'interesse del BOT nel corrispondente tasso di sconto, uniformando anche la base temporale.

Conversione su base 365:

$$d_{\text{BOT}}(0, 91) = \frac{0.035}{1 + 0.035 \times \frac{91}{365}} = 0.034697231 \quad [\text{Act}/365].$$

Conversione successiva su base 360:

$$d_{\text{BOT}}^{360}(0, 91) = d_{\text{BOT}}(0, 91) \times \frac{360}{365} = 0.034221926 \quad [\text{Act}/360].$$

Poiché $d_{\text{BOT}}^{360}(0, 91) = 3.422\%$ risulta superiore al $d_{\text{T-Bill}}(0, 91) = 3.16\%$, l'investimento in BOT è più redditizio, offrendo un rendimento maggiore di circa 26 punti base.

2.4 Il modello esponenziale

I modelli di capitalizzazione (o attualizzazione) presentati nelle sezioni precedenti consentono di determinare il valore futuro (o attuale) di capitali esigibili in epoche differenti. La remunerazione è rappresentata dagli interessi corrisposti alla scadenza o alla stipula del contratto.

Nelle o.f. considerate finora, gli interessi sono calcolati soltanto sul capitale iniziale (interesse semplice) oppure sul capitale finale (sconto semplice) e, una volta maturati, non vengono reinvestiti per incrementare il capitale disponibile.

In realtà, un investitore non limita le proprie decisioni d'investimento a un singolo periodo. È quindi naturale supporre che, estinta una o.f., gli interessi maturati non vengano consumati, ma reinvestiti (composti, o *compounded*) in una nuova o.f. Analogamente, una posizione debitoria può essere rinnovata includendo nel nuovo prestito sia il capitale iniziale sia gli interessi dovuti per l'operazione appena estinta. In entrambi i casi, la nuova o.f. può differire dalla precedente in termini di modello di capitalizzazione, tasso d'interesse e/o intervallo temporale.

Si ipotizzi che le parti concordino di rinnovare la stessa o.f. per m periodi, applicando un tasso costante i . Quale sarà, in tal caso, il modello per $M(t, s)$?

Le parti possono stabilire che gli interessi siano corrisposti alla fine di ogni

periodo, come nel regime dell'interesse semplice. Se il tasso d'interesse è espresso nella stessa unità temporale del k -esimo periodo (ad esempio: tasso mensile e periodicità mensile), la composizione della posizione creditoria (o debitoria) genera i seguenti valori futuri:

$$V(t+1) = V(t) + V(t) \times i = V(t)(1+i)$$

$$V(t+2) = V(t+1) + V(t+1) \times i = V(t)(1+i) + V(t)(1+i) \times i = V(t)(1+i)^2$$

$$V(t+3) = V(t+2) + V(t+2) \times i = V(t)(1+i)^2 + V(t)(1+i)^2 \times i = V(t)(1+i)^3$$

...

$$V(t+m) = V(t)(1+i)^{m-1} + V(t)(1+i)^{m-1} \times i = V(t)(1+i)^m$$

Il modello di capitalizzazione composta risulta quindi immediato se $m \in \mathbb{N}$. Ponendo $s = t + m$, si ottiene:

$$V(s) = V(t)(1+i)^{s-t}, \quad (2.40)$$

da cui segue che $V(t)$ euro investiti al tempo t equivalgono a $V(s)$ euro al tempo s , secondo un **modello di capitalizzazione a interesse composto** con tasso costante.

Il fattore montante, che rappresenta il valore di una unità di capitale esigibile a scadenza, è dato da:

$$M(t, s) = (1+i)^{s-t}, \quad (2.41)$$

mentre il corrispondente fattore di sconto risulta:

$$B(t, s) = \frac{1}{(1+i)^{s-t}} = (1+i)^{-(s-t)}. \quad (2.42)$$

Si osservi che $M(t, s)$ dipende esclusivamente dall'ampiezza dell'intervallo temporale $[t, s]$, per cui:

$$M(\tau) = (1+i)^\tau. \quad (2.43)$$

Nel caso in cui $\tau = s - t \in \mathbb{R}^+$, la (2.43) può essere interpretata come la composizione di un'infinità di o.f. di durata infinitesima. La (2.43) definisce una funzione esponenziale dell'intervallo temporale τ .

Come il lettore può facilmente verificare, la derivata prima della (2.43) è sempre positiva; di conseguenza, il fattore montante è una funzione

crescente di τ , con intercetta $M(0) = 1$.

Il fattore espresso dalla (2.43) possiede tutte le proprietà caratteristiche di un fattore montante. In particolare, la monotonicità crescente di $M(\tau)$ garantisce che $V(s) > V(t)$. La (2.43) definisce quindi il **modello esponenziale di capitalizzazione degli interessi**.

Ponendo $(1+i) = e^\delta$, da cui $\delta = \ln(1+i)$, la (2.43) diventa:

$$V(s) = V(t)e^{\delta \times \tau}. \quad (2.44)$$

Le relazioni (2.43) e (2.44) sono perfettamente equivalenti: differiscono soltanto per la parametrizzazione. Come si vedrà in seguito, il modello esponenziale espresso nella forma (2.44) consente di illustrare in modo più chiaro il concetto di **capitalizzazione continua**.

Un'ulteriore parametrizzazione del modello esponenziale si ottiene ponendo:

$$p = (1+i)^{-1} = e^{-\delta},$$

dove p è noto come **fattore di attualizzazione** per periodi di durata unitaria, o **fattore di sconto uniperiodale**. Sostituendo nella (2.43) si ottiene:

$$V(s) = V(t) \left(\frac{1}{p} \right)^\tau = V(t)p^{-(s-t)}. \quad (2.45)$$

Il corrispondente valore attuale è dato da:

$$V(t) = V(s)p^{s-t}. \quad (2.46)$$

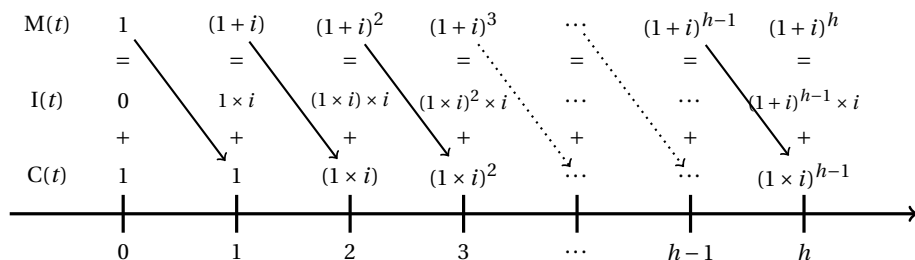


Figura 2.3: Rappresentazione grafica del meccanismo di formazione del montante nel modello esponenziale.

t	$M(t)$
0	1
1	$1 + i \times (1 - 0) = 1 + i$
2	$(1 + i) + (1 + i) \times i \times (2 - 1) = (1 + i)^2$
3	$(1 + i)^2 + (1 + i)^2 \times i \times (3 - 2) = (1 + i)^3$
...	...
h	$(1 + i)^{(h-1)} + (1 + i)^{(h-1)} \times i \times (h - h + 1) = (1 + i)^h$

Tabella 2.4: *Tabella riassuntiva del meccanismo di formazione del montante nel modello esponenziale.*

La Figura 2.3 e la Tabella 2.4 schematizzano il processo di formazione del montante di un capitale unitario nel modello esponenziale.

Un'importante proprietà del modello esponenziale è la **scindibilità**. Dati gli intervalli $[t, T]$ e $[T, s]$, con $t \leq T \leq s$, si ha che:

$$B(t, s) = B(t, T) B(T, s). \quad (2.47)$$

Da un punto di vista finanziario, la (2.47) assicura che il valore attuale in t di un euro esigibile alla scadenza s può essere ottenuto mediante due successive operazioni di attualizzazione definite su intervalli di tempo contigui.

Il modello esponenziale è scindibile poiché si verifica facilmente che:

$$\begin{aligned} B(t, s) &= (1 + i)^{-(s-t)} = (1 + i)^{-(s-T+T-t)} = \\ &= (1 + i)^{-(T-t)} (1 + i)^{-(s-T)} = B(t, T) B(T, s). \end{aligned}$$

Si lascia al lettore la dimostrazione che i modelli lineari non sono scindibili.

Si osservi che la forma funzionale del modello esponenziale non garantisce sempre la scindibilità. Da un punto di vista finanziario, tale proprietà implica la conoscenza, al tempo t , del prezzo spot $B(T, s)$. Ciò è possibile solo se l'o.f. presenta un tasso costante i , oppure se, al tempo t , sono già determinati — in modo definitivo — i tassi $i(t, T)$ e $i(t, s)$.

In altri termini, la scindibilità è garantita solo se i tassi non dipendono dal tempo di valutazione t , ma unicamente dalla scadenza, ossia se $i(t, T) =$

$i(T)$ e $i(t, s) = i(s)$.

L'Esempio 2.9 illustra la proprietà di scindibilità del modello esponenziale.

Esempio 2.9. *Determinare il valore futuro di un deposito di € 1,000,000 dopo 6 anni, al tasso annuo del 5%, considerando due diverse modalità d'investimento.*

Si assuma un tasso d'interesse annuo costante pari a $i = 5\%$. Confrontiamo le seguenti alternative:

- 1) un'unica operazione finanziaria con inizio in $t = 0$ e scadenza in $s = 6$;
- 2) due operazioni contigue: la prima con inizio in $t = 0$ e scadenza in $T = 4$, la seconda con inizio in $T = 4$ e scadenza in $s = 6$.

Operazione unica

$$V(6) = V(0) p^{-1}(0, 6) = € 1,000,000 \times (1 + 0.05)^6 = € 1,340,095.64.$$

Due operazioni contigue

Poiché $i(4, 6) = 5\%$, si ha:

$$p^{-1}(4, 6) = (1 + 0.05)^2, \quad p^{-1}(0, 4) = (1 + 0.05)^4.$$

Componendo le due operazioni sui sotto-intervalli $[0, 4]$ e $[4, 6]$:

$$V(4) = V(0) p^{-1}(0, 4),$$

$$V(6) = V(4) p^{-1}(4, 6) = V(0) p^{-1}(0, 4) p^{-1}(4, 6),$$

$$V(6) = € 1,000,000 \times (1.05)^4 \times (1.05)^2 = € 1,340,095.64.$$

In entrambi i casi il valore futuro coincide, confermando la **proprietà di scindibilità** del modello esponenziale: la capitalizzazione composta è indipendente dal modo in cui si suddivide l'intervallo temporale di riferimento. ■

Nell'Esempio 2.9, il valore futuro ottenuto frazionando il periodo di investimento in due intervalli contigui risulta uguale a quello calcolato nel caso in cui si scelga di investire in un'unica o.f. sull'intervallo $[0, 6]$. Tale risultato è dovuto alla proprietà di **scindibilità** di cui gode il modello esponenziale.

Il lettore verifichi che, utilizzando la legge lineare d'interesse, le due o.f. non risultano più equivalenti.

Esempio 2.10. *Determinare il valore futuro di un capitale investito a interesse composto, analizzando diversi regimi di capitalizzazione e tassi equivalenti.*

Il tesoriere di una società decide di investire € 1,000,000 in un deposito che paga il 3% annuo.

Il fattore di capitalizzazione per un investimento uni-periodico è:

$$p^{-1} = 1 + 0.03 = 1.03,$$

che rappresenta il valore futuro di un euro investito per un singolo periodo.

Il valore dell'investimento dopo 5 anni applicando la relazione (2.45) è dato da:

$$V(5) = V(0)(p^{-1})^5 = € 1,000,000 \times 1.03^5 = € 1,159,274.07,$$

dove $s = 5$, $t = 0$ e $V(0) = € 1,000,000$.

Poiché $(1 + i)^{-1} = e^{-\delta}$, si ricava:

$$\delta = \ln(1 + i) = \ln(1.03) = 0.0295588,$$

e, applicando la (2.44),

$$V(5) = € 1,000,000 \times e^{0.0295588 \times 5} = € 1,159,274.07.$$

Determinare il valore futuro dello stesso capitale se il tasso del 3% è composto su base semestrale

Gli interessi sono ora capitalizzati ogni sei mesi. Con $m = 5$ anni e $n = 2$ semestri per anno, i periodi complessivi sono $m \times n = 10$. Applicando

la (2.45):

$$V(10) = € 1,000,000 \times 1.03^{10} = € 1,343,916.38.$$

Il valore futuro è maggiore rispetto al caso precedente, poiché la capitalizzazione più frequente amplifica l'effetto dell'interesse composto.

Determinare l'esborso per interessi su un prestito di € 500,000 al 5.3% annuo da rimborsare in un'unica soluzione dopo 4 anni e 8 mesi

Poiché $s = 4 + 8/12 = 4.67$ e $p^{-1} = 1.053$,

$$V(4.67) = € 500,000 \times 1.053^{4.67} = € 636,371.17,$$

con un costo per interessi pari a:

$$I = € (636,371.17 - 500,000) = € 136,371.17.$$

Il tasso annuo semplice equivalente è:

$$i(0, 4.67) = \frac{636,371.17 - 500,000}{500,000} \times \frac{1}{4.67} = 0.0584 = 5.84\%.$$

Determinare l'ammontare massimo finanziabile se l'esborso finale non può superare € 620,000

Dato $V(4.67) = € 620,000$, il valore attuale al tasso del 5.3% è:

$$V(0) = V(4.67)p^{4.67} = € 620,000 \times 0.949668^{4.67} = € 487,137.09,$$

dove $p = (1 + 0.053)^{-1} = 0.949668$ è il fattore di sconto uniperiodale.

Se si desidera ottenere esattamente € 500,000 mantenendo l'esborso finale di € 620,000, il tasso d'interesse che garantisce l'equivalenza finanziaria è:

$$p = \left(\frac{500,000}{620,000} \right)^{1/4.67} = 0.955, \quad i = \frac{1}{0.955} - 1 = 0.0471 = 4.71\%.$$

Pertanto, riducendo il tasso annuo dal 5.3% al 4.71%, è possibile mantenere invariato l'importo finanziato desiderato entro il limite di rimborso stabilito. ■

2.5 Tassi finanziariamente equivalenti

Nelle operazioni di capitalizzazione e di attualizzazione è necessario che il tasso d'interesse sia espresso nella stessa unità di misura del tempo. Nell'Esempio 2.10, il tempo è stato riportato in modo da risultare coerente con il tasso d'interesse utilizzato.

In generale, data una frazione temporale pari a $1/n$, e indicando con i_n il tasso con periodicità $1/n$ (semestrale, nell'Esempio 2.10), la formula di capitalizzazione assume la forma:

$$V(s) = V(t)(1 + i_n)^{n \times m}. \quad (2.48)$$

Come nel regime di capitalizzazione semplice, può essere utile determinare il tasso **i equivalente** a un dato tasso periodico i_n . Affinché i due tassi siano equivalenti, il valore futuro (o, in alternativa, il valore attuale) calcolato utilizzando i e i_n deve risultare identico. Si ha quindi:

$$V(t)(1 + i)^m = V(t)(1 + i_n)^{nm}, \quad (2.49)$$

da cui si ricava:

$$i = (1 + i_n)^n - 1, \quad (2.50)$$

e, in modo equivalente:

$$i_n = (1 + i)^{1/n} - 1. \quad (2.51)$$

Nella pratica contrattuale, il tasso periodico i_n non è quasi mai indicato esplicitamente: le condizioni riportano di norma il tasso nominale i , dal quale si ricavano i tassi per i diversi periodi di capitalizzazione applicando le relazioni sopra esposte.

2.6 Tassi effettivi e tassi nominali

Si definisce **tasso nominale** il tasso d'interesse annuo che esprime la misura complessiva della remunerazione di un capitale in un anno, senza specificare la frequenza con cui gli interessi vengono capitalizzati.

Un **tasso nominale convertibile**, invece, indica quante volte nel corso dell'anno gli interessi vengono calcolati e aggiunti al capitale, cioè capitalizzati.

Un tasso nominale (o convertibile) può essere trasformato in un tasso effettivo con periodicità $1/n$, analogamente a quanto avviene nei modelli di capitalizzazione semplice.

Pertanto, se si indica con j_n il tasso nominale annuo convertibile n -volte l'anno, ossia il tasso relativo a un'operazione finanziaria in cui gli interessi vengono capitalizzati n -volte in un anno, si ha:

$$j_n = n \times i_n \quad (2.52)$$

da cui:

$$i_n = \frac{j_n}{n}. \quad (2.53)$$

Dati il numero m di anni (o periodi) di durata dell'o.f. e la frequenza n di capitalizzazione degli interessi in un anno (o periodo di riferimento), il valore futuro del capitale si ottiene come:

$$V(s) = V(t) \left(1 + \frac{j_n}{n} \right)^{n \times m}. \quad (2.54)$$

Il tasso annuo effettivo i , finanziariamente equivalente al tasso annuo nominale convertibile j_n , si ottiene eguagliando i valori futuri (o, in alternativa, i valori attuali) calcolati capitalizzando (o scontando) al tasso i e al tasso $i_n = j_n/n$, ovvero:

$$V(t)(1+i)^m = V(t) \left(1 + \frac{j_n}{n} \right)^{n \times m},$$

da cui:

$$i = \left(1 + \frac{j_n}{n} \right)^n - 1. \quad (2.55)$$

Sostituendo la (2.51) nella (2.52) si ottiene:

$$j_n = n \left[(1 + i)^{1/n} - 1 \right]. \quad (2.56)$$

Nella (2.55), i rappresenta il tasso d'interesse effettivo sull'intero periodo (nell'esempio, l'anno), derivato dal tasso effettivo i_n relativo alla frazione $\frac{1}{n}$ di periodo.

Se non è espressamente specificato come *tasso nominale* o *convertibile*, il tasso di un'o.f. deve intendersi come **tasso effettivo**.

Nella Tabella 2.6 sono riportate le condizioni contrattuali di un conto corrente bancario: il tasso a credito e quello a debito sono nominali annui, mentre la capitalizzazione degli interessi avviene con periodicità trimestrale.

La tabella riporta, ad esempio, "12.30% nominale (12.88% effettivo annuo)" per il tasso sugli interessi debitori. L'Esempio 2.11 illustra il calcolo che consente di passare dalla misura nominale del tasso d'interesse a quella effettiva.

Esempio 2.11. *Determinare il tasso effettivo annuo corrispondente a un tasso nominale del 12.30% con capitalizzazione trimestrale.*

Le condizioni contrattuali di un conto corrente (Tabella 2.6) indicano un tasso debitore nominale annuo pari al 12.30%, con tasso effettivo annuo dichiarato del 12.88%. La periodicità di capitalizzazione è trimestrale, ossia quattro volte l'anno, per cui il tasso nominale deve essere interpretato come un tasso annuo nominale convertibile 4 volte l'anno.

Il tasso effettivo per singolo periodo di capitalizzazione, i_4 , si ottiene dal tasso nominale annuo $j_4 = 12.30\%$ applicando la relazione (2.53):

$$i_4 = \frac{0.1230}{4} = 0.03075.$$

Dalla formula del valore futuro (2.55) si ricava invece il tasso effettivo annuo i finanziariamente equivalente:

$$i = \left(1 + \frac{0.1230}{4} \right)^4 - 1 = (1 + 0.03075)^4 - 1 = 0.12879 = 12.88\%.$$

Il valore di 12.88% coincide con quello indicato nelle condizioni contrattuali, confermando la correttezza del calcolo. Questo esempio evidenzia come la frequenza di capitalizzazione influenzi il rendimento effettivo: a parità di tasso nominale, un maggior numero di capitalizzazioni annuali determina un rendimento effettivo più elevato.

2.7 Intensità istantanea d'interesse

È interessante osservare il comportamento della (2.55) al crescere di n , cioè al crescere della frequenza con cui gli interessi vengono capitalizzati.

Se si pone $x = n/j_n$, la (2.55) può essere riscritta come:

$$1 + i = \left[\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right]^{j_n}. \quad (2.57)$$

Nella Tabella 2.5 sono riportati i valori di n , j_n/n e del termine tra parentesi quadre nel secondo membro della relazione (2.57).

Si osserva che, al crescere di n , quest'ultimo tende progressivamente al valore 2.7182, cioè al numero di Nepero e .

n	$\frac{j_n}{n}$	$\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$
1	0.03	2.678598
2	0.015	2.698171
3	0.010	2.704814
4	0.0075	2.708158
5	0.006	2.710172
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
596	5.03356×10^{-5}	2.718213
597	5.02513×10^{-5}	2.718214
598	5.01672×10^{-5}	2.718214
599	5.00835×10^{-5}	2.718214
600	5.00000×10^{-5}	2.718214
∞	δ/n	e

Tabella 2.5: Tasso equivalente all'aumentare della frequenza di capitalizzazione.

Quando n tende a $+\infty$, la quantità al secondo membro della (2.57) converge infatti al limite notevole:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Ricordando inoltre che la (2.56) rappresenta a sua volta un limite notevole per $n \rightarrow +\infty$, e facendo riferimento alla parametrizzazione del modello esponenziale introdotto nella Sezione 2.4, si ottiene:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+i)^{1/x} - 1}{1/x} = \ln(1+i) = \delta.$$

Possiamo quindi concludere che:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right]^{j_x} = e^{\delta}.$$

Il modello esponenziale definito dalla (2.44) rappresenta dunque una **legge di capitalizzazione continua**, in cui gli interessi vengono capitalizzati istante per istante.

Il parametro δ , noto come **intensità istantanea di interesse**, può essere interpretato come un **tasso nominale annuo convertibile un numero infinito di volte l'anno**, ossia come un tasso nominale annuo convertibile in modo continuo.

Dal punto di vista economico-finanziario, l'intensità istantanea di interesse δ misura la **velocità di crescita del capitale nel tempo** in un regime di capitalizzazione continua.

Essa rappresenta la derivata istantanea del montante rispetto al tempo, ossia il tasso infinitesimo con cui il capitale cresce in ogni istante.

Formalmente, tale relazione può essere espressa come:

$$\frac{dV(t)}{dt} = \delta V(t),$$

la cui soluzione è:

$$V(t) = V(0)e^{\delta t}.$$

In altri termini, δ esprime la crescita proporzionale e continua del capitale nel tempo, e costituisce il parametro fondamentale del modello esponenziale di capitalizzazione, che rappresenta il caso limite del regime di capitalizzazione composta al tendere della frequenza di capitalizzazione all'infinito.

CONDIZIONI ECONOMICHE DI CONTO BANCA IMAGE E CANALI DIRETTI DOCUMENTO DI SINTESI

CONTRATTO DI CONTO CORRENTE DI CORRISPONDENZA E DEL SERVIZIO CHE REGOLA I RAPPORTI A DISTANZA TRA BANCA E CLIENTE

Si riportano di seguito, in forma di sintesi, le più significative condizioni economiche e normative che regolano il rapporto.

PRINCIPALI CONDIZIONI ECONOMICHE

Capitalizzazione degli interessi:

Gli interessi creditori e debitori vengono conteggiati e portati in conto con periodicità **TRIMESTRALE** ed il saldo periodico produce interessi secondo le medesime modalità.

TASSI

Tassi creditori	0.010% nominale (0.0100% effettivo annuo)
Tassi debitori	
per utilizzi autorizzati	12.30% nominale (12.88% effettivo annuo)
per utilizzi autorizzati e garantiti	12.30% nominale (12.88% effettivo annuo)
per sconfinamenti	12.30% nominale (12.88% effettivo annuo)
per scoperti su conti non affidati	12.30% nominale (12.88% effettivo annuo)

COMMISSIONE DI MASSIMO SCOPERTO

per utilizzi autorizzati	0%
per utilizzi autorizzati e garantiti	0%

PREZZI E CONDIZIONI

Canone mensile	€0 (se utilizzo diverso dallo sportello) €4.90 (se nel corso del mese viene effettuata una o più operazioni allo sportello)
Spese tenuta conto	€0
Spese di Liquidazione Periodiche	€0
Utenze domiciliate	gratuite
RID commerciali	€0.75
Recupero costi per operazioni effettuate in mancanza di disponibilità (MancaFondi)	€0 € per addebiti fino a €20 €12.50 (max giornaliero €12.50) per addebiti superiori a €20

Tabella 2.6: Condizioni contrattuali di un conto corrente bancario

Capitolo 3

Flussi e portafogli finanziari

Si definisce **flusso finanziario** (f.f.) (o **cash flow**) un insieme di operazioni finanziarie, finite o infinite, di importo $V_1, V_2, \dots, V_m$ disponibili alle date $t_1, t_2, \dots, t_m$.

Gli importi, che possono assumere valori positivi o negativi a seconda che rappresentino entrate o uscite, si raccolgono nell'insieme:

$$\vec{V} = \{V_1, V_2, V_3, \dots, V_m\}.$$

Graficamente:

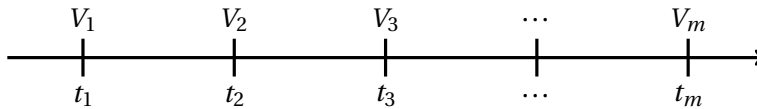


Figura 3.1: *Rappresentazione grafica di un flusso finanziario.*

L'insieme delle date a cui corrispondono gli importi del flusso è detto **scadenario** e si indica con:

$$\vec{t} = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}.$$

3.1 Valore di un flusso finanziario

I modelli di equivalenza finanziaria consentono di confrontare capitali disponibili in epoche differenti. Il valore attuale in t di un importo esigibile a una data futura s si ottiene applicando all'importo l'operatore

di attualizzazione $B(t, s)$. In modo analogo, impiegando l'operatore di capitalizzazione $M(t, s)$ è possibile trasferire a scadenza s un capitale disponibile in t .

Dal punto di vista economico, un soggetto razionale rinuncerà a consumare parte del proprio reddito presente solo se tale rinuncia sarà adeguatamente remunerata da un interesse futuro.

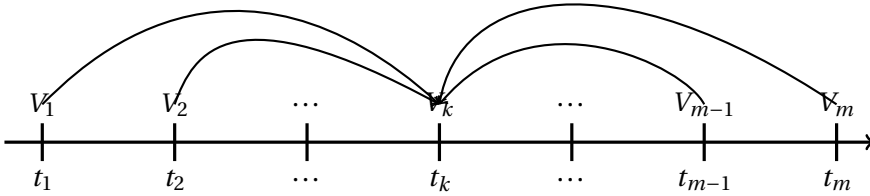


Figura 3.2: Valore finanziario di un flusso in t_k .

Esempio 3.1. Rappresentare un'operazione finanziaria come flusso di cassa e distinguere tra il caso di un titolo a scadenza unica e quello di un titolo a cedole periodiche.

Un'o.f. a pronti può essere interpretata come un flusso di cassa caratterizzato da una sola scadenza:

$$\bar{V} = \{-V(t), V(s)\}, \quad \bar{t} = \{t, s\}.$$

Un tipico esempio è quello di un BOT, in cui si effettua un esborso iniziale e si riceve alla scadenza un unico rimborso del valore nominale:

$$\bar{V} = \{-0.98, 1.00\}, \quad \bar{t} = \{0, 91\}.$$

Un BTP rappresenta invece un caso di **flusso finanziario periodico**, con pagamenti intermedi (cedole) e rimborso finale del capitale:

$$\bar{V} = \{-P, I, I, \dots, I + C\}, \quad \bar{t} = \{t, t + \tau, t + 2\tau, \dots, t + m\tau\}.$$

Ponendo $t = 0$ e assumendo τ come unità di tempo, il flusso del BTP può essere espresso in forma semplificata come:

$$\bar{V} = \{-P, I, I, \dots, I + C\}, \quad \bar{t} = \{0, 1, 2, \dots, m\}.$$

Questa rappresentazione consente di trattare in modo uniforme, con gli stessi strumenti analitici, titoli di diversa natura e periodicità. ■

Un soggetto razionale, pertanto, attribuisce valori diversi a capitali collocati in epoche differenti. Ad esempio, se Caio intende monetizzare oggi un flusso che gli garantirà €100 fra un anno e altri €100 fra due anni, il valore attuale di tale flusso non potrà essere pari a €200. La controparte, infatti, sarà disposta allo scambio solo pagando una somma inferiore, poiché rinuncerà a una parte del proprio reddito per acquistare il flusso e richiederà una remunerazione adeguata sotto forma di interesse.

Per valutare correttamente un flusso finanziario è quindi necessario ricondurre tutti gli importi a una stessa epoca di riferimento. Come mostra la Figura 3.2, data una generica epoca t_k e un flusso $\bar{V}$, gli importi V_j con $t_j < t_k$ devono essere *capitalizzati* a t_k , mentre quelli con $t_j > t_k$ devono essere *attualizzati* a t_k . Il valore del flusso in t_k è dunque la somma di tutti gli importi riportati alla medesima epoca di valutazione:

$$\bar{V}(t_k) = V_1 p^{t_1 - t_k} + V_2 p^{t_2 - t_k} + \dots + V_k + \dots + V_{m-1} p^{t_{m-1} - t_k} + V_m p^{t_m - t_k}. \quad (3.1)$$

Si osservi che, se $t_j \leq t_k$, l'esponente del fattore di sconto uniperiodale p è negativo, e pertanto $p^{t_j - t_k}$ rappresenta il valore futuro di un'unità monetaria per il periodo $[t_j, t_k]$. La (3.1) può essere espressa in forma compatta mediante una semplice sommatoria:

$$\bar{V}(t_k) = \sum_{j=1}^m V_j p^{t_j - t_k}. \quad (3.2)$$

3.2 Valore di un portafoglio finanziario

Si considerino N flussi finanziari $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \dots, \bar{V}_N$, definiti su uno stesso scadenziario di riferimento

$$\bar{t} = \{t_1, t_2, \dots, t_m\},$$

e un insieme di pesi reali

$$\bar{u} = \{u_1, u_2, \dots, u_N\}.$$

Un **portafoglio finanziario**, indicato con $\bar{\Pi}$, è costituito da u_1 unità del flusso $\bar{V}_1$, u_2 unità del flusso $\bar{V}_2$, u_3 unità del flusso $\bar{V}_3$, e così via. Se un flusso $\bar{V}_k$ non è incluso nel portafoglio, allora $u_k = 0$.

Il valore del portafoglio finanziario alla generica epoca t_k è dato dalla somma dei valori dei flussi $\bar{V}_j$ valutati in t_k , ciascuno ponderato con il rispettivo peso u_j :

$$\bar{\Pi}(t_k) = u_1 \bar{V}_1(t_k) + u_2 \bar{V}_2(t_k) + \cdots + u_N \bar{V}_N(t_k) = \sum_{j=1}^N u_j \bar{V}_j(t_k). \quad (3.3)$$

3.3 Rendite ed ammortamenti

Le **rendite** e gli **ammortamenti** sono particolari f.f. in cui una quantità di capitale S , detta **capitale iniziale** o **principal**, è scambiata con un flusso di **rate** $\bar{R} = \{R_1, R_2, \dots, R_m\}$.

I mutui sono un esempio tipico di ammortamento: il mutuatario riceve oggi il capitale iniziale S e lo rimborsa in m rate (non necessariamente costanti). Le pensioni integrative sono invece particolari **rendite** per le quali m non può essere fissato in anticipo. In questo caso il beneficiario costituisce la somma S negli anni lavorativi versando un premio periodico, che può essere costante oppure, ad esempio, rivalutato al tasso d'inflazione.

La costituzione di un capitale può avvenire anche tramite un singolo versamento iniziale. Per esempio, ricevuta un'eredità, si può acquistare una rendita che garantisce un reddito periodico R .

Esempio 3.2. *Determinare il valore temporale dei flussi e il valore complessivo del portafoglio nelle date indicate.*

Sullo scadenziario

$$\bar{t} = \{0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3\},$$

posto $t_0 = 0$ e unità di misura $\tau = 1$ anno, sono definiti i seguenti flussi finanziari (in milioni di euro):

- $\bar{V}_1 = \{-20, 0, 5, 10, -2, 100\}$;

- $\bar{V}_2 = \{15, 15, 15, 115, 0, 0\}$;
- $\bar{V}_3 = \{-40, 0, 10, 0, 0, 180\}$.

Il tasso d'interesse annuo è pari al 10%. Si richiede di calcolare:

1. il valore temporale in $t_0 = 0$ e in $t_k = 1.7$;
2. il valore del portafoglio in $t_0 = 0$ con $u_1 = 2.5$, $u_2 = 0$ e $u_3 = 0.7$.

Posto $p = 1.10^{-1} = 0.91$, i valori temporali del flusso $\bar{V}_1$ in $t_0 = 0$ e $t_k = 1.7$ risultano:

$$\begin{aligned}\bar{V}_1(0) &= -20 \times 0.91^{0.5} + 5 \times 0.91^{1.5} + 10 \times 0.91^2 \\ &\quad - 2 \times 0.91^{2.5} + 100 \times 0.91^3 \\ &= 67.08,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{V}_1(1.7) &= -20 \times 0.91^{0.5-1.7} + 5 \times 0.91^{1.5-1.7} + 10 \times 0.91^{2-1.7} \\ &\quad - 2 \times 0.91^{2.5-1.7} + 100 \times 0.91^{3-1.7} \\ &= 78.88.\end{aligned}$$

La formula (3.2) si modifica solo negli esponenti: per $t_k = 1.7$ è sufficiente esplicitare l'intervallo temporale su cui valutare il flusso $\bar{V}$.

Si verifica analogamente che:

$$\bar{V}_2(0) = 135.98, \quad \bar{V}_3(0) = 105.77, \quad \bar{V}_2(1.7) = 159.90, \quad \bar{V}_3(1.7) = 124.37.$$

Il valore del portafoglio in $t_0 = 0$ risulta quindi:

$$\begin{aligned}\bar{\Pi}(0) &= u_1 \bar{V}_1(0) + u_2 \bar{V}_2(0) + u_3 \bar{V}_3(0) \\ &= 2.5 \times 67.08 + 0 \times 135.98 + 0.7 \times 105.77 \\ &= 241.75.\end{aligned}$$

Il portafoglio considerato, composto principalmente dal primo e terzo flusso finanziario, ha dunque in $t_0 = 0$ un valore complessivo pari a € 241.75 milioni. ■

Un BTP è un tipico esempio di rendita: si paga un prezzo per acquistare il diritto a un reddito semestrale pari alla cedola c . Dal punto di vista dell'emittente (lo Stato italiano), il BTP è un particolare ammortamento in cui le rate sono rappresentate dagli interessi semestrali e il capitale è restituito in un'unica soluzione alla scadenza.

Un altro esempio è quello di un soggetto che paga una somma S oggi per ricevere, fra $h = 10$ anni, una rendita trimestrale per $m = 5$ anni, in modo da poter pagare gli studi ai propri figli.

In una rendita, la rata R può essere versata all'inizio o alla fine dei periodi identificati dallo scadenziario $\bar{t} = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_m\}$. Nel primo caso la rendita si dice **anticipata**, nel secondo **posticipata**. Se la decorrenza avviene dopo h periodi, la rendita si dice **differita**.

Sulla base della (3.2), il valore in $t = 0$ di una rendita con scadenziario periodico e unitario $\bar{t} = \{0, 1, 2, \dots, m\}$, di rata costante $V_j = R$, pagata o incassata alla fine di ogni periodo, è:

$$\bar{V}(0) = \sum_{j=1}^m V_j p^j = R \sum_{j=1}^m p^j. \quad (3.4)$$

La sommatoria in (3.4) è una progressione geometrica di m termini, ragione $p < 1$ e primo termine p , il cui valore è:

$$\sum_{j=1}^m p^j = p \frac{1 - p^m}{1 - p}. \quad (3.5)$$

Sostituendo $p = (1 + i)^{-1}$ nel secondo membro di (3.5) si ottiene:

$$a_{m|i} = \frac{1 - (1 + i)^{-m}}{i}. \quad (3.6)$$

La (3.6) rappresenta il **valore attuale di una rendita unitaria posticipata** e si legge “ a posticipato figurato m al tasso i ”. Di conseguenza, il valore attuale di una rendita con rata R è:

$$\bar{V}(0) = R a_{m|i}. \quad (3.7)$$

Se i pagamenti sono effettuati all'inizio di ogni periodo, il valore attuale è:

$$\bar{V}(0) = \sum_{j=1}^m V_j p^{j-1} = R \frac{1}{p} \sum_{j=1}^m p^j. \quad (3.8)$$

Sostituendo in (3.8) l'espressione (3.5) si ottiene:

$$\bar{V}(0) = R \frac{1}{p} a_{m|i} = R \frac{1-p^m}{1-p} = R \frac{1-(1+i)^{-m}}{d} = R \ddot{a}_{m|i}, \quad (3.9)$$

dove $d = i/(1+i)$.

Il termine

$$\ddot{a}_{m|i} = \frac{1-(1+i)^{-m}}{d} \quad (3.10)$$

rappresenta il **valore attuale di una rendita unitaria anticipata** e si legge “ a anticipato figurato m al tasso i ”.

Se gli accantonamenti periodici servono a creare un capitale da utilizzare in un'epoca futura (p.es. fondo pensione, assicurazione sulla vita), occorre determinarne il valore futuro. In particolare:

$$\begin{aligned} \bar{V}(m) &= Rp^{-(m-1)} + Rp^{-(m-2)} + \dots + R \\ &= R \sum_{j=1}^m p^{-(m-j)} = Rp^{-m} \sum_{j=1}^m p^j \\ &= Rp^{-m} p \frac{1-p^m}{1-p} = R(1+i)^m \frac{1-(1+i)^{-m}}{i}, \end{aligned}$$

da cui:

$$\bar{V}(m) = R \frac{(1+i)^m - 1}{i} = R s_{m|i}, \quad (3.11)$$

dove

$$s_{m|i} = \frac{(1+i)^m - 1}{i} \quad (3.12)$$

è il **valore futuro di una rendita unitaria posticipata**.

Si lascia al lettore la verifica che, per una rendita anticipata:

$$\bar{V}(m) = R \frac{(1+i)^m - 1}{d} = R \ddot{s}_{m|i}, \quad (3.13)$$

dove

$$\ddot{s}_{m|i} = \frac{(1+i)^m - 1}{d} \quad (3.14)$$

è il **valore futuro di una rendita unitaria anticipata**.

Le **rendite perpetue** sono costituite da un insieme infinito di pagamenti

periodici ($m \rightarrow \infty$). Ad esempio, il valore **fondamentale** di un titolo azionario che paga un dividendo costante è assimilabile a una rendita perpetua. Il valore attuale è:

$$\bar{V}(0) = R \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^m p^j = R \sum_{j=1}^{\infty} p^j, \quad (3.15)$$

e, poiché $0 < p < 1$,

$$\bar{V}(0) = R \frac{p}{1-p} = R a_{\infty|i}, \quad (3.16)$$

dove

$$a_{\infty|i} = \frac{1}{i} \quad (3.17)$$

è il **valore attuale di una rendita perpetua unitaria posticipata**. Analogamente, per la rendita perpetua anticipata:

$$\bar{V}(0) = R \ddot{a}_{\infty|i}, \quad \ddot{a}_{\infty|i} = \frac{1}{d}, \quad (3.18)$$

ossia il **valore attuale di una rendita perpetua unitaria anticipata**.

Le rendite **differite** condividono le stesse caratteristiche delle tipologie analizzate; cambia soltanto l'epoca della prima rata, posticipata di h periodi. Per una rendita posticipata differita di h periodi:

$$\begin{aligned} \bar{V}(0) &= R p^{h+1} + R p^{h+2} + \dots + R p^{h+m} = R \sum_{j=h+1}^{h+m} p^j \\ &= R \sum_{j=1}^m p^{j+h} = R p^h \sum_{j=1}^m p^j, \end{aligned}$$

da cui

$$\bar{V}(0) = R p^h a_{m|i} = R {}_h a_{m|i}, \quad (3.19)$$

dove ${}_h a_{m|i}$ è il **valore attuale di una rendita unitaria posticipata differita di h periodi**. Nel caso di rate anticipate:

$$\bar{V}(0) = R p^h \ddot{a}_{m|i} = R {}_h \ddot{a}_{m|i}, \quad (3.20)$$

dove ${}_h \ddot{a}_{m|i}$ è il **valore attuale di una rendita unitaria anticipata differita di h periodi**.

I risultati si estendono facilmente ai casi in cui la periodicità delle rate differisce da quella del tasso d'interesse. In tal caso la rata R viene frazionata in n parti R' , versate alla fine dell' n -esima frazione del periodo (per rendite anticipate, all'inizio di ogni sub-periodo); il numero dei periodi diventa $m' = n \cdot m$ e il tasso equivalente è $i' = (1 + i)^{1/n} - 1$. Per il valore attuale o futuro si applicano le stesse formule sostituendo R' , m' e i' .

Un tipico esempio di costituzione di un capitale è dato dai fondi pensione a contribuzione definita, dove i versamenti periodici si rivalutano a un tasso prefissato o indicizzato: si parla di **rendite crescenti** per via dell'accrescimento indotto dai versamenti. Una volta costituito il capitale necessario, e tenuto conto che esso frutta a sua volta interessi, è possibile determinare una sequenza periodica di prelievi tale da azzerare il conto in m anni (in prima approssimazione, come per le pensioni¹). In tal caso il capitale costituito rappresenta il valore attuale dei prelievi futuri e, in esattamente m prelievi, il conto iniziale si azzerà: si parla di **rendite decrescenti**.

Per esempio, nei prestiti rateali il finanziatore eroga una somma a un terzo per l'acquisto di un bene; le rate pagate dal debitore costituiscono, per il creditore, una rendita decrescente, assimilabile ai prelievi di un fondo (pari alla somma prestata) che si azzerà in m rate.

Esempio 3.3. Qual è l'investimento iniziale necessario affinché il figlio di Tizio possa prelevare €1,000 al mese per 10 anni da un fondo che remunera il capitale al tasso annuo del 6.5%?

In questo caso non si tratta della costituzione di un capitale futuro, ma della determinazione della somma iniziale da investire affinché il figlio di Tizio possa effettuare prelievi mensili costanti per 10 anni, azzerando progressivamente il fondo. Si tratta quindi di una **rendita decrescente frazionata** con:

$$R = 1,000, \quad i = 6.5\%, \quad n = 12 \text{ (rate mensili)}, \quad m = 10 \text{ anni}.$$

Poiché la rendita ha periodicità mensile, occorre determinare il

¹Una valutazione più precisa richiede di considerare la probabilità di morte del soggetto.

numero totale di rate e il tasso di interesse frazionario:

$$m' = 12 \times 10 = 120,$$

$$i' = (1 + 0.065)^{1/12} - 1 = 0.005261694.$$

L'investimento iniziale necessario a garantire il prelievo mensile di €1,000 per 10 anni è:

$$V(0) = €1,000 \times \frac{1 - (1 + 0.005261694)^{-120}}{0.005261694}$$

$$= €88,806.75.$$

Pertanto, un versamento iniziale di circa €88,807 consente al figlio di Tizio di prelevare €1,000 al mese per 10 anni.

Determinare il capitale iniziale nel caso in cui i prelievi abbiano inizio dopo 3 anni (rendita differita).

In questo caso, il valore attuale della rendita deve essere ulteriormente scontato per tenere conto del periodo di differimento. Si ottiene quindi:

$$V(0) = €1,000 \times (1 + 0.065)^{-3} \times \frac{1 - (1 + 0.005261694)^{-120}}{0.005261694}$$

$$= €73,518.59.$$

Come atteso, il capitale iniziale richiesto risulta inferiore, in quanto il differimento consente al capitale di maturare interessi per un periodo più lungo, prima dell'inizio dei prelievi.

Determinare il capitale iniziale necessario affinché, oltre ai prelievi periodici, sia disponibile un capitale residuo di €8,000 alla fine del decimo anno (rendita con capitale residuo).

Il deposito iniziale sarà dato dalla somma del valore attuale dei prelievi futuri e del valore attuale della rimanenza:

$$V(0) = €8,000 \times (1 + 0.065)^{-10} + €1,000 \times \frac{1 - (1 + 0.005261694)^{-120}}{0.005261694}$$

$$= €93,068.56.$$

Determinare il tempo di esaurimento del fondo nel caso di prelievi mensili di €1,000 a fronte di un deposito iniziale pari a €125,000 (durata della rendita).

La relazione generale per la rendita decrescente è:

$$V(0) = R \frac{1 - (1 + i')^{-nm}}{i'}.$$

Ponendo x il numero di anni incogniti, si ottiene:

$$€125,000 = €1,000 \times \frac{1 - (1 + 0.005261694)^{-12x}}{0.005261694},$$

da cui:

$$x = -\frac{1}{12} \times \frac{\log(1 - 0.005261694 \times 125)}{\log(1 + 0.005261694)} = 17.024.$$

Il fondo verrà quindi esaurito dopo circa 17 anni. In modo analogo, si può determinare il numero di anni necessario affinché rimanga un saldo di €3,000 (si lascia la verifica al lettore). ■

Esempio 3.4. *Determinare quanti versamenti semestrali da €5,000 sono necessari affinché il capitale finale accumulato, a un tasso annuo del 5%, non risulti inferiore a €30,000.*

Si tratta di un tipico caso di **rendita posticipata**, in cui l'incognita è il numero di rate necessarie per costituire un capitale futuro prefissato.

Poiché il tasso d'interesse semestrale è:

$$i' = (1 + 0.05)^{1/2} - 1 = 0.024695077,$$

la condizione da imporre è:

$$5,000 \times \frac{(1 + i')^{2x} - 1}{i'} \geq 30,000.$$

Ricavando x , si ottiene:

$$x \geq \frac{1}{2} \times \frac{\log\left(1 + 0.024695077 \times \frac{30,000}{5,000}\right)}{\log(1 + 0.024695077)} = 2.8319.$$

Arrotondando all'intero superiore, servono quindi $x = 3$ anni, ossia $m' = 6$ versamenti semestrali. Il valore futuro dei versamenti è pari a:

$$V(6) = 5,000 \times \frac{(1 + 0.024695077)^6 - 1}{0.024695077} = € 31,914.26.$$

Pertanto, effettuando 6 versamenti semestrali di € 5,000, si potrà costituire un capitale finale di circa € 31,914.26, superiore al valore minimo desiderato di € 30,000. ■

3.4 Piani di ammortamento

Un **ammortamento finanziario** consiste nel dilazionare il rimborso di un prestito su di un intervallo di tempo.

Gli ammortamenti hanno la stessa struttura di una rendita, infatti il debitore realizza uno “scambio” fra la somma S presa in prestito ed il flusso di pagamenti $\bar{R} = \{R_1, R_2, \dots, R_m\}$, da versare all'istituto di credito per il rimborso del prestito. La somma S non è altro che il valore attuale del flusso $\bar{R}$, scontato da un tasso i , che rappresenta la remunerazione per l'istituto di credito.

Redigere un **piano di ammortamento** consiste nel distinguere all'interno delle rate R_k una **quota capitale** ed una **quota interesse**. Le motivazioni sono di carattere prevalentemente pratico. Infatti, le quote d'interesse, a differenza delle quote capitale, rappresentano un costo per il debitore ed hanno un diverso trattamento fiscale. In caso di contenzioso, dovuto all'insolvenza del debitore, le quote capitale seguono una corsia preferenziale, a differenza delle quote interessi su cui grava un giudizio di congruità.

Si denoti con $\bar{A} = \{S, -R_1, -R_2, \dots, -R_m\}$ il piano di ammortamento del capitale S sullo scadenziario $\bar{t} = \{0, 1, 2, \dots, m\}$. Il valore temporale in $t_k = k$ è dato da:

$$A_k = Sp^{-k} - \sum_{j=1}^k R_j p^{-(k-j)} - \sum_{j=k+1}^m R_j p^{(j-k)}. \quad (3.21)$$

Il valore del debito al tempo k è dato da Sp^{-k} , mentre il valore del **debito estinto** è dato da:

$$\sum_{j=1}^k R_j p^{-(k-j)}. \quad (3.22)$$

La differenza fra queste due quantità fornisce l'ammontare del **debito residuo** al tempo k :

$$D_k = Sp^{-k} - \sum_{j=1}^k R_j p^{-(k-j)}; \quad (3.23)$$

si osservi che D_{k-1} è dato da:

$$D_{k-1} = Sp^{-(k-1)} - \sum_{j=1}^{k-1} R_j p^{-(k-j-1)}. \quad (3.24)$$

Con semplici passaggi algebrici si ottiene:

$$D_k = Sp^{-k} - \sum_{j=1}^{k-1} R_j p^{-(k-j)} - R_k = \quad (3.25)$$

$$= p^{-1} \left[Sp^{-(k-1)} - \sum_{j=1}^{k-1} R_j p^{-(k-j-1)} \right] - R_k. \quad (3.26)$$

Il termine tra parentesi quadre è uguale a D_{k-1} , da cui:

$$D_k = (1+i)D_{k-1} - R_k = D_{k-1} + iD_{k-1} - R_k. \quad (3.27)$$

Ricavando R_k dalla relazione (3.27) si ha che:

$$R_k = D_{k-1} - D_k + iD_{k-1}. \quad (3.28)$$

La rata R_k è costituita da due componenti: la **quota capitale**, pari alla differenza tra il debito residuo al tempo $k-1$ e quello al tempo k , e la **quota interesse**, corrispondente all'interesse maturato sul debito residuo al tempo $k-1$. In simboli:

$$C_k = D_{k-1} - D_k \quad (3.29)$$

$$I_k = iD_{k-1}. \quad (3.30)$$

Si verifica facilmente che la somma delle quote capitale è proprio il capitale

k	C_k	I_k	R_k	D_k
0	–	–	–	$D_0 = S$
1	C_1	iD_0	$C_1 + I_1$	$D_1 = S - C_1$
2	C_2	iD_1	$C_2 + I_2$	$D_2 = D_1 - C_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	C_m	iD_{m-1}	$C_m + I_m$	$D_m = D_{m-1} - C_m = 0$

Tabella 3.1: *Generico piano d'ammortamento*

preso in prestito S . Infatti:

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^m C_j &= \sum_{j=1}^m (D_{j-1} - D_j) = \\
 &= D_0 - D_1 + D_1 - D_2 + \dots + D_{m-1} - D_m = \\
 &= D_0 - D_m = S,
 \end{aligned}$$

in quanto $D_0 = S$ e $D_m = 0$.

Il capitale preso in prestito S può essere restituito durante la vita del contratto secondo un piano di rimborso qualsiasi, a patto che la condizione di chiusura elementare:

$$S = \sum_{j=1}^m C_j$$

venga rispettata. Gli importi delle rate, esigibili nei tempi descritti dallo scadenziario $\bar{t}$, si determinano in base alla relazione:

$$R_k = C_k + I_k. \quad (3.31)$$

Nella tabella 3.1 è riportato un generico piano d'ammortamento.

I due tipi di ammortamento più diffusi sono l'**italiano** (o **uniforme**) in cui le quote capitali sono costanti, ed il **francese** (o **progressivo**) nel quale invece le rate sono costanti.

Nell'ammortamento italiano la condizione di chiusura elementare impone che:

$$mC = S \rightarrow C = \frac{S}{m}.$$

Le rate R_k si determinano tramite la 3.31 e chiaramente non sono costanti.

Per quanto riguarda l'ammortamento francese, la rata costante si determina ricordando che la condizione di chiusura iniziale impone che,

$$S = Ra_{m|i} \rightarrow R = \frac{S}{a_{m|i}}.$$

Esempio 3.5. *Caio ottiene un prestito di €250,000 al tasso annuo $i = 7.2\%$, da estinguere in 10 anni mediante rate semestrali costanti. Si determini l'importo della rata.*

Poiché le rate sono semestrali, è necessario convertire il tasso annuo effettivo nel tasso semestrale equivalente:

$$i_2 = (1 + 0.072)^{1/2} - 1 = 0.0354.$$

La rata costante risulta quindi:

$$R = \frac{S}{a_{20|i_2}} = \frac{€250,000}{14.164} = €17,649.90.$$

Il valore calcolato rappresenta la rata semestrale necessaria per estinguere il debito in venti periodi, tenendo conto del tasso periodale i_2 . Ciascuna rata è composta da una *quota interessi*, calcolata sul debito residuo all'inizio del periodo, e da una *quota capitale*, pari alla differenza tra la rata e la quota interessi. Man mano che il debito residuo diminuisce, la quota interessi si riduce, mentre la quota capitale cresce progressivamente: questo meccanismo definisce il classico *piano di ammortamento alla francese*, riportato nella Tabella 3.2.

k	C_k	I_k	R_k	D_k
0	–	–	–	250,000.00
1	8,806.32	8,843.58	17,649.90	241,193.68
2	9,117.84	8,532.06	17,649.90	232,075.84
3	9,440.37	8,209.53	17,649.90	222,635.47
4	9,774.32	7,875.58	17,649.90	212,861.15
5	10,120.08	7,529.82	17,649.90	202,741.07
6	10,478.07	7,171.83	17,649.90	192,262.99
7	10,848.73	6,801.17	17,649.90	181,414.27
8	11,232.49	6,417.41	17,649.90	170,181.77
9	11,629.84	6,020.07	17,649.90	158,551.94
10	12,041.23	5,608.67	17,649.90	146,510.70
11	12,467.18	5,182.72	17,649.90	134,043.52
12	12,908.20	4,741.70	17,649.90	121,135.32
13	13,364.82	4,285.08	17,649.90	107,770.50
14	13,837.59	3,812.31	17,649.90	93,932.91
15	14,327.09	3,322.81	17,649.90	79,605.82
16	14,833.90	2,816.00	17,649.90	64,771.92
17	15,358.64	2,291.26	17,649.90	49,413.28
18	15,901.94	1,747.96	17,649.90	33,511.34
19	16,464.46	1,185.44	17,649.90	17,046.88
20	17,046.88	603.02	17,649.90	0.00

Tabella 3.2: Piano d'ammortamento con rata semestrale costante.

Si osservi che, mentre la rata R_k rimane costante nel tempo, la composizione tra quota interessi e quota capitale varia in senso opposto: la prima decresce in modo quasi lineare, la seconda aumenta con lo stesso ritmo. Di conseguenza, il debito residuo D_k si riduce progressivamente fino ad azzerarsi alla ventesima rata. Questo schema consente di mantenere costante l'onere periodale per il debitore, rendendo il piano di ammortamento particolarmente adatto ai prestiti a medio-lungo termine. ■

Un piano di rimborso può prevedere un periodo iniziale di *preammortamento*, durante il quale il pagamento delle quote capitali viene posticipato a un'epoca successiva. Durante tale fase il debito non si riduce: esso può restare invariato, se vengono corrisposti solo gli interessi (*preammortamento parziale*), oppure crescere per capitalizzazione, se non vengono effettuati pagamenti di alcun tipo (*preammortamento totale*).

Nel primo caso il debitore paga, per un numero prefissato di periodi, i soli interessi maturati sul capitale, rinviando l'inizio del rimborso della quota capitale. Nel secondo caso, invece, il prestito si comporta come una *rendita differita* di h periodi, poiché l'ammortamento effettivo inizia dopo il preammortamento e il debito cresce al tasso i .

L'importo della rata in presenza di un periodo di preammortamento totale risulta:

$$R = \frac{S}{{}_h a_{m|i}}, \quad \text{dove} \quad {}_h a_{m|i} = (1+i)^{-h} \frac{1 - (1+i)^{-m}}{i}.$$

Esempio 3.6. *Caio ottiene un prestito di €250,000 al tasso annuo $i = 7.2\%$, da estinguere in 10 anni mediante rate semestrali costanti.*

Come nell'esempio 3.5, il tasso semestrale equivalente risulta:

$$i_2 = (1 + 0.072)^{1/2} - 1 = 0.0354.$$

Si considerino due diverse modalità di rimborso che prevedono un periodo iniziale di preammortamento di due anni, durante il quale non vengono pagate **quote capitale**.

Preammortamento parziale

Durante il periodo di preammortamento parziale, il debitore paga soltanto gli interessi maturati sul capitale, rinviando l'inizio del rimborso della quota capitale a un'epoca successiva. Nel nostro caso, Caio corrisponde per i primi due anni (quattro semestri) esclusivamente gli interessi sul debito di €250,000, mentre a partire dal quinto semestre iniziano le rate costanti di rimborso del capitale e interessi.

$$R = \frac{S}{a_{20|i_2}} = \frac{€250,000}{14.164} = €17,649.90.$$

k	C_k	I_k	R_k	D_k
0	—	—	—	250,000.00
1	—	8,843.58	—	250,000.00
2	—	8,843.58	—	250,000.00
3	—	8,843.58	—	250,000.00
4	—	8,843.58	—	250,000.00
5	8,806.32	8,843.58	17,649.90	241,193.68
6	9,117.84	8,532.06	17,649.90	232,075.84
7	9,440.37	8,209.53	17,649.90	222,635.47
8	9,774.32	7,875.58	17,649.90	212,861.15
9	10,120.08	7,529.82	17,649.90	202,741.07
10	10,478.07	7,171.83	17,649.90	192,262.99
11	10,848.73	6,801.17	17,649.90	181,414.27
12	11,232.49	6,417.41	17,649.90	170,181.77
13	11,629.84	6,020.07	17,649.90	158,551.94
14	12,041.23	5,608.67	17,649.90	146,510.70
15	12,467.18	5,182.72	17,649.90	134,043.52
16	12,908.20	4,741.70	17,649.90	121,135.32
17	13,364.82	4,285.08	17,649.90	107,770.50
18	13,837.59	3,812.31	17,649.90	93,932.91
19	14,327.09	3,322.81	17,649.90	79,605.82
20	14,833.90	2,816.00	17,649.90	64,771.92
21	15,358.64	2,291.26	17,649.90	49,413.28
22	15,901.94	1,747.96	17,649.90	33,511.34
23	16,464.46	1,185.44	17,649.90	17,046.88
24	17,046.88	603.02	17,649.90	0.00

Tabella 3.3: Piano d'ammortamento con rata semestrale costante e preammortamento parziale di due anni.

Durante il periodo di preammortamento parziale, il debito residuo rimane invariato, poiché non vengono pagate quote capitale. L'onere complessivo aumenta rispetto a un piano ordinario, in quanto gli

interessi vengono comunque corrisposti senza ridurre il capitale su cui essi maturano.

Preammortamento totale come rendita differita

Si consideri ora una seconda modalità di rimborso, in cui la banca concede un periodo di *preammortamento totale* di due anni, durante il quale non viene corrisposto alcun pagamento — né interessi, né capitale. In tale periodo il debito cresce per capitalizzazione degli interessi, fino a raggiungere un ammontare maggiore al momento di inizio dell’ammortamento.

La rata costante, in questo caso, è data da:

$$R = \frac{S}{{}_2a_{20|0.0354}} = \frac{€250,000}{12.32560234} = €20,282.98,$$

dove ${}_2a_{20|0.0354} = (1 + 0.072)^{-2} \frac{1 - (1 + 0.0354)^{-20}}{0.0354}.$

Tabella 3.4: *Piano d’ammortamento con rata semestrale costante e preammortamento totale di due anni.*

k	C_k	I_k	R_k	D_k
0	–	–	–	250,000.00
1	–	–	–	258,843.58
2	–	–	–	268,000.00
3	–	–	–	277,480.32
4				287,296.00
5	10,120.08	10,162.90	20,282.98	277,175.92
6	10,478.07	9,804.91	20,282.98	266,697.85
7	10,848.73	9,434.26	20,282.98	255,849.12
8	11,232.49	9,050.49	20,282.98	244,616.63
9	11,629.84	8,653.15	20,282.98	232,986.79
10	12,041.23	8,241.75	20,282.98	220,945.56
11	12,467.18	7,815.80	20,282.98	208,478.37
12	12,908.20	7,374.78	20,282.98	195,570.17
13	13,364.82	6,918.16	20,282.98	182,205.35
14	13,837.59	6,445.39	20,282.98	168,367.76

15	14,327.09	5,955.90	20,282.98	154,040.67
16	14,833.90	5,449.09	20,282.98	139,206.77
17	15,358.64	4,924.35	20,282.98	123,848.13
18	15,901.94	4,381.04	20,282.98	107,946.19
19	16,464.46	3,818.52	20,282.98	91,481.73
20	17,046.88	3,236.10	20,282.98	74,434.85
21	17,649.90	2,633.08	20,282.98	56,784.95
22	18,274.25	2,008.73	20,282.98	38,510.70
23	18,920.69	1,362.29	20,282.98	19,590.00
24	19,590.00	692.98	20,282.98	0.00

Durante il preammortamento totale il debitore non effettua alcun pagamento; il debito cresce per capitalizzazione degli interessi fino all'inizio della fase di ammortamento. Da un punto di vista finanziario, tale operazione equivale a una *rendita differita* di h periodi, il cui valore attuale è:

$${}_h a_{m|i} = (1+i)^{-h} \frac{1 - (1+i)^{-m}}{i},$$

da cui la rata si ottiene come:

$$R = \frac{S}{{}_h a_{m|i}}.$$

In conclusione, sia nel preammortamento parziale sia in quello totale, l'effetto principale è l'aumento del costo complessivo del prestito e l'allungamento della sua vita finanziaria, poiché durante il periodo di preammortamento non vengono rimborsate quote di capitale. ■

3.5 Piani di ammortamento alternativi

Oltre al piano di ammortamento “alla francese”, caratterizzato da rate costanti e da una progressiva riduzione del debito residuo, nella pratica finanziaria sono utilizzati anche altri schemi di rimborso. Questi piani alternativi differiscono principalmente per la distribuzione nel tempo delle quote capitale e delle quote interessi, nonché per le modalità con cui il capitale viene effettivamente estinto. Tra i più noti si annoverano l'**ammortamento all'americana** e l'**ammortamento alla tedesca**.

3.5.1 Ammortamento all'americana o a doppio tasso

Si ipotizzi che il rimborso del prestito avvenga sulla base di due tassi distinti: un tasso j di accumulazione ed un tasso i di remunerazione. Questo schema è noto come **ammortamento a doppio tasso** o **ammortamento all'americana**. L'ammortamento all'americana richiede due distinte o.f.: (i) un piano di accumulo; (ii) il pagamento periodico degli interessi sul prestito. Il piano di accumulo è strutturato in modo che, al termine dell'ammortamento, le quote accantonate, capitalizzate per tutta la durata al tasso d'investimento j (tasso attivo), producano un montante esattamente pari alla somma prestata S . La quota interessi è calcolata sulla somma prestata al tasso di remunerazione i (tasso passivo) e rimane costante (salvo variazioni contrattuali del tasso) in quanto il debito si estingue solo alla scadenza. La rata è la somma tra quota di accumulo e la quota interessi, quindi è costante nel tempo.

In formule:

$$R = Q + I, \quad Q = \frac{S}{s_{m|j}} \text{ (quota di accumulo),} \quad I = S \times i \text{ (quota interessi),}$$

dove $s_{m|j}$ è il valore futuro della rendita immediata posticipata unitaria costante di m rate al tasso j . In generale $i \neq j$; per $i = j$ la rata R coincide con quella dell'ammortamento francese. Un caso di ammortamento all'americana è riportato nell'Esempio 3.7.

Storicamente, l'ammortamento all'americana si è sviluppato nella prassi anglosassone, dove la normativa fiscale consentiva di beneficiare della detraibilità sia degli interessi passivi sia dei premi della polizza vita collegata al piano di accumulo. In Italia l'utilizzo è stato meno diffuso, principalmente per ragioni di natura fiscale.

Esempio 3.7. *La Sig.ra Rossi richiede un prestito di €40,000 da rimborsare in 15 rate annue secondo il piano all'americana. I tassi contrattuali sono $j = 1.75\%$ (tasso attivo) e $i = 5.25\%$ (tasso passivo), su base annua. Determinare la rata e costruire il piano di ammortamento.*

L'ammortamento all'americana (o a doppio tasso) si basa su due operazioni distinte:

1. un *piano di accumulo*, in cui il debitore versa una quota costante Q che, capitalizzata al tasso di accumulazione j , ricostituisce il

capitale S alla scadenza;

2. il *pagamento periodico degli interessi* sul capitale S , calcolati al tasso di remunerazione i , costanti nel tempo poiché il capitale si estingue integralmente solo alla fine.

La rata complessiva è quindi:

$$R = Q + I, \quad Q = \frac{S}{s_{m|j}}, \quad I = S \times i,$$

dove $s_{m|j}$ è il valore futuro di una rendita posticipata unitaria costante di m rate al tasso j . Il capitale accantonato cresce nel tempo secondo:

$$M_k = Q s_{k|j}, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

e al termine dell'ammortamento risulta $M_m = S$.

Nel caso in esame:

$$s_{15|1.75\%} = \frac{(1 + 0.0175)^{15} - 1}{0.0175} = 16.98,$$

$$Q = \frac{€40,000.00}{16.98} = €2,355.10,$$

$$I = €40,000.00 \times 0.0525 = €2,100.00,$$

$$R = €(2,355.10 + 2,100.00) = €4,455.10.$$

La quota di accumulo Q rimane costante e, capitalizzata al tasso j , genera un montante che cresce progressivamente fino a raggiungere la somma S alla quindicesima rata. Poiché il capitale è rimborsato solo alla scadenza, la quota interessi resta invariata durante tutta la durata del prestito.

Il piano di ammortamento è riportato di seguito (il capitale accumulato cresce al tasso j):

k	Q_k	I_k	R_k	Cap. accum.	D_k
0	–	–	–	–	40,000.00
1	2,355.10	2,100.00	4,455.10	2,355.10	40,000.00
2	2,355.10	2,100.00	4,455.10	4,751.41	40,000.00
3	2,355.10	2,100.00	4,455.10	7,189.66	40,000.00
4	2,355.10	2,100.00	4,455.10	9,670.58	40,000.00
5	2,355.10	2,100.00	4,455.10	12,194.92	40,000.00
6	2,355.10	2,100.00	4,455.10	14,763.43	40,000.00
7	2,355.10	2,100.00	4,455.10	17,376.89	40,000.00
8	2,355.10	2,100.00	4,455.10	20,036.08	40,000.00
9	2,355.10	2,100.00	4,455.10	22,741.82	40,000.00
10	2,355.10	2,100.00	4,455.10	25,494.90	40,000.00
11	2,355.10	2,100.00	4,455.10	28,296.16	40,000.00
12	2,355.10	2,100.00	4,455.10	31,146.44	40,000.00
13	2,355.10	2,100.00	4,455.10	34,046.60	40,000.00
14	2,355.10	2,100.00	4,455.10	36,997.52	40,000.00
15	2,355.10	2,100.00	4,455.10	40,000.00	0.00

Tabella 3.5: *Piano d'ammortamento all'americana con capitale accumulato al tasso $j = 1.75\%$ e quota interessi calcolata al tasso $i = 5.25\%$.*

Nel piano all'americana il debito resta costante per tutta la durata del contratto, mentre il fondo di accumulo cresce al tasso j fino a ricostituire il capitale preso a prestito. Tale struttura consente di mantenere rate costanti nel tempo, ma concentra il rimborso del capitale in un unico pagamento finale, con maggiore rischio residuo per il finanziatore. ■

3.5.2 Ammortamento alla tedesca o a interessi anticipati

In questo schema il pagamento degli interessi avviene *all'inizio* di ciascun periodo, anziché alla fine, da cui la denominazione di ammortamento a **interessi anticipati**.

In particolare, la prima rata comprende esclusivamente la quota interessi, mentre l'ultima contiene soltanto la quota capitale. Le quote capitali sono costanti e gli interessi, pagati anticipatamente, decrescono nel tempo.

Indicando con $d = i/(1+i)$ il tasso di sconto periodico e con m il numero complessivo di rate, si ha:

$$\begin{aligned} I_k &= d D_k, & k &= 0, 1, \dots, m-1, \\ R_0 &= I_0, \\ R_k &= C_k + I_k, & k &= 1, \dots, m-1, \\ R_m &= C_m. \end{aligned}$$

In sintesi, l'ammortamento alla tedesca presenta quote capitale costanti, come nell'ammortamento all'italiana, ma se ne differenzia per l'anticipazione del pagamento degli interessi, che modifica la distribuzione temporale dei flussi.

Esempio 3.8. La Sig.ra Rossi richiede un prestito di €40,000 da rimborsare in 7 anni mediante rate semestrali secondo il piano di ammortamento alla tedesca (quote capitali costanti). Il tasso contrattuale, nominale annuo convertibile semestralmente, è $j_2 = 5.20\%$. Costruire il piano di ammortamento.

Dal tasso nominale si ricava il tasso semestrale

$$i_2 = \frac{j_2}{2} = 2.60\%.$$

Il corrispondente tasso di sconto è quindi

$$d_2 = \frac{i_2}{1+i_2} = \frac{0.026}{1.026} = 0.025341.$$

Poiché la durata è di 7 anni con rate semestrali, il numero dei periodi è $m = 7 \cdot 2 = 14$.

La quota capitale costante risulta

$$C = \frac{40,000}{14} = \text{€}2,857.14.$$

Alla stipula del contratto, in $k = 0$, si ha:

$$D_0 = \text{€}40,000.00, \quad I_0 = d_2 D_0 = \text{€}1,013.65.$$

Dopo il pagamento della prima quota capitale:

$$D_1 = D_0 - C = \text{€}37,142.86, \quad I_1 = d_2 D_1 = \text{€}941.24.$$

Pertanto:

$$R_0 = I_0 = \text{€}1,013.65 \quad \text{e} \quad R_{14} = C = \text{€}2,857.14.$$

Il piano di ammortamento è riportato di seguito:

k	C_k	I_k	R_k	D_k
0	–	1,013.65	1,013.65	40,000.00
1	2,857.14	941.24	3,798.38	37,142.86
2	2,857.14	868.84	3,725.98	34,285.71
3	2,857.14	796.44	3,653.58	31,428.57
4	2,857.14	724.04	3,581.18	28,571.43
5	2,857.14	651.63	3,508.77	25,714.29
6	2,857.14	579.23	3,436.37	22,857.14
7	2,857.14	506.82	3,363.96	20,000.00
8	2,857.14	434.42	3,291.56	17,142.86
9	2,857.14	362.02	3,219.16	14,285.71
10	2,857.14	289.61	3,146.75	11,428.57
11	2,857.14	217.21	3,074.35	8,571.43
12	2,857.14	144.81	3,001.95	5,714.29
13	2,857.14	72.40	2,929.55	2,857.14
14	2,857.14	–	2,857.14	0.00

Tabella 3.6: Piano di ammortamento alla tedesca con interessi anticipati e quote capitali costanti.

3.6 Titoli a cedola fissa

I titoli a reddito fisso (**fixed income securities**) sono caratterizzati dal pagamento periodico di interessi e dalla restituzione, alla scadenza, del capitale investito. In ambito finanziario, i titoli a reddito fisso sono anche detti **obbligazioni** o **coupon-bearing bonds** (CBB) o **bullet bonds** (BB).

Dal punto di vista dell'investitore, un'obbligazione è un f.f. i cui importi periodici sono determinati moltiplicando il **tasso cedolare (coupon rate)** per il **valore facciale² (face value)**. Lo scambio avviene a fronte del pagamento di un **prezzo** quotato in percentuale del valore facciale. I titoli a cedola fissa rappresentano una forma di finanziamento per stati sovrani e imprese.

La differenza tra emittenti di diversa qualità creditizia è riconducibile al **rischio di default**, ossia alla probabilità che l'emittente non onori, in tutto o in parte, i propri impegni. Le principali agenzie di rating esprimono tale rischio con scale alfanumeriche. Ad esempio, **AAA** indica il rischio più basso; **Aa** (Moody's) o **AA** (S&P/Fitch) denotano un rischio maggiore rispetto ad **AAA**; all'interno delle classi di Moody's, suffissi numerici come **Aa2** indicano gradazioni intermedie. Le classi proseguono tipicamente con **BBB**, **BB**, ..., **CCC**, fino a **D**, che segnala il default.

Tabella 3.7: *Valutazioni del merito creditizio del debito sovrano di alcuni Paesi al 30.04.2025, secondo le quattro principali agenzie: Standard & Poor's, Moody's, Fitch e Scope.*

Nazione	S&P	Moody's	Fitch	Scope
Italia	BBB	Baa3	BBB	BBB+
Germania	AAA	Aaa	AAA	AAA
Francia	AA	Aa2	AA-	AA
Spagna	A	Baa1	A-	A-
Portogallo	BBB+	A3	A-	A-
Stati Uniti d'America	AA+	Aaa	AA+	AA
Regno Unito	AA	Aa3	AA-	AA
Giappone	A+	A1	A	A
Svizzera	AAA	Aaa	AAA	AAA
Federazione Russa	SD	Ca	NR	
Canada	AAA	Aaa	AA+	
Australia	AAA	Aaa	AAA	
Nuova Zelanda	AA+	Aaa	AA+	
Brasile	BB	Ba2	BB	
Corea del Sud	AA	Aa2	AA-	
Cina	A+	A1	A+	A
Argentina	CCC+	Ca	CCC-	
Bulgaria	BBB	Baa1	BBB	BBB+
Romania	BBB-	Baa3	BBB-	BBB-

²Il termine *valore facciale* risale al periodo in cui le obbligazioni erano titoli cartacei: sulla **facciata** era indicato il valore da rimborsare a scadenza e la base su cui calcolare la cedola. Molti titoli avevano tagliandi ("coupon") da staccare ad ogni pagamento degli interessi.

Nazione	S&P	Moody's	Fitch	Scope
Grecia	BBB-	Ba1	BBB-	BBB-
Svezia	AAA	Aaa	AAA	AAA
Arabia Saudita	A+	A1	A+	
Sud Africa	BB-	Ba2	BB-	BB
Andorra	BBB		A-	
Emirati Arabi Uniti	AA	Aa2		
Afghanistan	Not rated			
Antigua e Barbuda	Not rated			
Albania	B+	B1		
Armenia	Not rated	Ba3	B+	
Angola	CCC+	Caa1	B-	
Austria	AA+	Aa1	AA+	AAA
Aruba	BBB		BB+	
Azerbaijan	BB+	Ba2	BB+	
Bosnia Erzegovina	B	B3		
Barbados	B-	Caa1	B	
Bangladesh	BB-	Ba3	BB-	
Belgio	AA	Aa3	AA-	AA-
Burkina Faso	B			
Bahrain	B+	B2	B+	
Burundi	Not rated			
Benin	B+	B1	B+	
Bermuda	A+	A2	AA+	
Bolivia	B-	B2	B-	
Bahamas	BB	Ba2		
Bhutan	Not rated			
Botswana	BBB+	A3		
Bielorussia	CCC	B3	NR	
Belize	SD	Caa3		
Repubblica Centrafricana	Not rated			
Isole Cook	B+			
Cile	A	A1	A-	
Colombia	BB+	Baa2	BB+	
Costa Rica	BB-	B2	BB-	

Sulla base di parametri economico-finanziari, le agenzie di **rating** (ad es.: Moody's, Standard & Poor's, Fitch e Scope) e talvolta organismi internazionali (ad es.: il FMI) attribuiscono un **rating score**, ossia un giudizio sintetico sul merito di credito dell'emittente.

Nella Tabella 3.7 sono riportate le valutazioni del merito creditizio dei titoli sovrani di alcuni Paesi³. Per l'Italia, la tabella mostra una classe **investment grade** di fascia medio-bassa (**BBB, Baa3, BBB, BBB+**),

³Fonte: <https://www.teleborsa.it/quotazioni/rating>.

cui corrisponde un rischio di credito moderato e un discreto grado di affidabilità.

I titoli emessi da stati sovrani (o imprese) con merito di credito inferiore all'investment grade rientrano nella categoria **high-yield** o **junk bonds** (speculative grade), caratterizzati da rischio più elevato e, in genere, da rendimenti attesi maggiori.

3.6.1 Il rendimento a scadenza

Come discusso nella Sezione 2.2.1, la remunerazione di un titolo a cedola nulla deriva esclusivamente dal guadagno in conto capitale, o **capital gain** (ad esempio, si acquista a 98.75 e si ottiene 100 alla scadenza). Di conseguenza, durante la vita del titolo il prezzo di uno ZCB è sempre inferiore a 100.

Il rendimento di un BOT quantifica, su base annua, la remunerazione dell'investimento, e come illustrato nella Sezione 2.2.1, esso è stato determinato tramite il modello d'interesse lineare. In maniera analoga, nel seguito determineremo il rendimento di un BOT tramite il modello di capitalizzazione esponenziale.

L'operazione finanziaria associata a uno ZCB unitario è rappresentata dal f.f. $\bar{V} = \{-B(t, s), 1\}$ sullo scadenziario $\bar{t} = \{t, s\}$. Per definizione, essa è equa, poiché:

$$B(t, s) = [i + i(t, s)]^{-(s-t)}, \quad (3.32)$$

e il tasso implicito $i(t, s)$ si ricava da (3.32) come:

$$i(t, s) = \left[\frac{1}{B(t, s)} \right]^{1/(s-t)} - 1. \quad (3.33)$$

Il tasso $i(t, s)$ coincide con il **rendimento a scadenza** (o **yield to maturity, YTM**), ossia il rendimento che si ottiene mantenendo il titolo fino alla scadenza. In simboli: $i(t, s) = y(t, s)$.

Per i titoli a cedola fissa, il rendimento deriva sia dalle cedole periodiche sia da eventuali capital gain. Ad esempio, al 30/04/2025 il titolo governativo belga BE0000349580 (Belgium Tf 0.10% Gn30 Eur) con scadenza 22/06/2030 quotava 89.27, mentre il BTP IT0005497000 (Btp Italia Gn30 Eur) con scadenza 28/06/2030 quotava 100.08. In quest'ultimo caso, l'acquisto a 100.08 implica una perdita in conto capitale, compensata però dalle cedole rimanenti, che assicurano comunque un rendimento positivo.

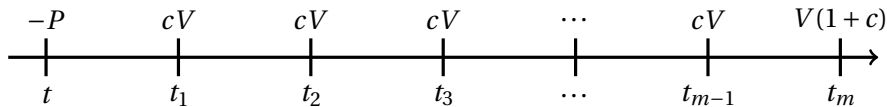


Figura 3.3: *Flusso finanziario di un titolo a cedola fissa. La cedola c rappresenta il pagamento periodico espresso in percentuale del valore facciale V .*

Come nel caso del BOT, anche il prezzo di un BTP si ottiene attualizzando i flussi di cassa futuri del titolo, costituiti dalle cedole cV e dal rimborso del valore nominale V alla scadenza t_m . Per ciascun pagamento si utilizza il corrispondente fattore di sconto $B(t, t_j)$, con $j = 1, 2, \dots, m$, che dipende dal tasso a pronti $i(t, t_j)$ per impieghi nell'intervallo $[t, t_j]$. In simboli,

$$P = cV \sum_{j=1}^m B(t, t_j) + VB(t, t_m). \quad (3.34)$$

A differenza del BOT, per il quale lo YTM $y(t, s)$ coincide con il tasso a pronti $i(t, s)$ relativo all'intervallo $[t, s]$ e può quindi essere ricavato direttamente dall'inversione della formula del prezzo, nel caso di un BTP il rendimento a scadenza $y(t, t_m)$ si ottiene determinando l'unico tasso i^* che uguaglia il prezzo osservato con il valore attuale dei flussi futuri.

Assumendo, per semplicità di notazione, che $t = 0$ e $V = 1$, il tasso $i^* = y(0, t_m)$ è la soluzione dell'Equazione (3.35) e definisce lo YTM del BTP con scadenza t_m .

$$P = \sum_{j=1}^m c(1 + i^*)^{-(t_j)} + (1 + i^*)^{-(t_m)}, \quad (3.35)$$

Il tasso $y(0, t_m)$ corrisponde al rendimento effettivo del titolo nel caso in cui esso sia mantenuto fino alla scadenza e le cedole vengano reinvestite allo stesso tasso. Poiché tale ipotesi è raramente soddisfatta nella pratica, lo YTM viene generalmente interpretato come una misura sintetica del rendimento richiesto dal mercato.

Al mutare delle condizioni di mercato, varierà anche la remunerazione richiesta dagli investitori, in quanto la cedola è contrattualmente fissata, e l'aggiustamento potrà avvenire unicamente attraverso il prezzo del titolo, che si adeguerà al nuovo equilibrio fra domanda e offerta.

3.6.2 Quotazione dei titoli a reddito fisso

Si consideri un titolo obbligazionario con valore nominale unitario, cedola annua c e scadenza m . Indicando con i^* il rendimento a scadenza, il prezzo del titolo è determinato uguagliando il valore attuale dei flussi futuri al prezzo di mercato:

$$P = c \frac{1 - (1 + i^*)^{-m}}{i^*} + (1 + i^*)^{-m}. \quad (3.36)$$

Nel caso di emissione alla pari, il prezzo iniziale del titolo è pari al valore nominale. Dalla relazione (3.36) si ottiene quindi

$$1 = c \frac{1 - (1 + i^*)^{-m}}{i^*} + (1 + i^*)^{-m} \quad \text{da cui} \\ i^* = c. \quad (3.37)$$

Pertanto, quando un titolo è emesso alla pari, la cedola coincide con il rendimento a scadenza, i^* , che è anche il rendimento richiesto dal mercato, $y(0, m)$.

La presenza nel mercato secondario di BTP quotati **sopra la pari** è generalmente dovuta al fatto che tali titoli sono stati emessi in periodi in cui la remunerazione richiesta dal mercato era più elevata rispetto a quella corrente. In virtù dell'uguaglianza (3.37), la cedola coincide con lo YTM del titolo, il quale riflette le condizioni di mercato al momento dell'emissione. Di conseguenza questi titoli presentano cedole relativamente più alte rispetto ai rendimenti oggi richiesti dagli investitori. Per compensare il maggiore valore del flusso di cedole, il prezzo del titolo tende quindi a collocarsi sopra la pari.

In modo analogo, la presenza di BTP quotati **sotto la pari** è riconducibile a titoli emessi in periodi caratterizzati da tassi di mercato più bassi. In questo caso la cedola risulta relativamente modesta rispetto ai rendimenti correnti e, per allineare il rendimento del titolo ai livelli richiesti dal mercato, il prezzo deve necessariamente collocarsi sotto la pari.

In particolare, se si indica con $y(t^+, m)$ lo YTM osservato in una data successiva all'emissione, si ha che:

- se $y(t^+, m) > y(t, m)$, il prezzo del titolo scende sotto la pari;
- se $y(t^+, m) < y(t, m)$, il prezzo sale sopra la pari.

Ne segue la ben nota relazione inversa tra prezzo e rendimento di un titolo obbligazionario: a parità di altre condizioni, un aumento dello YTM comporta una riduzione del prezzo e viceversa.

3.7 Titoli indicizzati

I titoli indicizzati si distinguono per la presenza di un flusso di importi **aleatorio**, il cui ammontare non è noto al momento della stipula del contratto, ma viene determinato in istanti futuri prestabiliti. Il **meccanismo di indicizzazione**, ossia la regola che stabilisce l'entità dei pagamenti, è definito dalle clausole contrattuali e specifica in che modo le variazioni di un parametro di riferimento (ad esempio, un indice dei prezzi o un tasso di mercato) influenzano i flussi di cassa del titolo.

In questo testo si considerano due forme di indicizzazione: **puntuale** e **sincrona**. L'indicizzazione è detta **puntuale** quando il tasso variabile di rivalutazione è riferito a una singola data; è invece **sincrona** quando il pagamento dell'importo rivalutato avviene alla fine del periodo cui tale tasso si riferisce.

I principali esempi di contratti indicizzati ai tassi di interesse sono i **titoli a tasso variabile** (**Floating Rate Notes**, in breve **FRN**) e i **mutui indicizzati**. Nel contesto italiano, i titoli di Stato a tasso variabile sono denominati **Certificati di Credito del Tesoro (CCT)**.

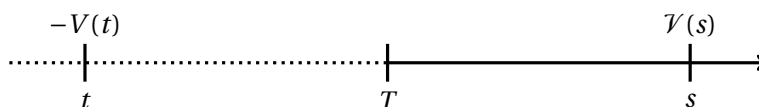


Figura 3.4: Rappresentazione grafica di un'operazione finanziaria spot per un titolo a cedola nulla indicizzato.

3.7.1 Titoli a cedola nulla indicizzati

Il titolo indicizzato con la struttura più semplice è il **titolo a cedola nulla indicizzato**. Per coerenza di notazione, si utilizzerà l'acronimo dello ZCB (Zero Coupon Bond) antepoendo una **F** — per indicare la natura *floating* del tasso — ottenendo così la sigla **FZCB**.

Si considerino tre istanti di tempo $t < T < s$, e si ipotizzi che in t venga stipulato un contratto a tasso variabile che prevede il pagamento, alla scadenza s , di un importo aleatorio $V(s)$ determinato in base al tasso $i(T, s)$. Di conseguenza, $V(s)$ non è noto al momento della stipula, poiché dipende da un tasso che sarà osservato solo in T . È importante sottolineare che l'operazione descritta **non** è una **operazione forward**: in un contratto

forward, infatti, il prezzo del titolo oggetto di scambio è noto sin dall'istante iniziale t .

Nel caso di un FZCB, T rappresenta l'istante in cui si effettua la rilevazione del tasso (o, equivalentemente, del prezzo dello ZCB) riferito all'intervallo $[T, s]$, sulla base del quale sarà calcolato l'importo da corrispondere alla scadenza s . L'investitore paga, quindi, in t , un ammontare certo $V(t)$ per ricevere, in s , un ammontare aleatorio $\mathcal{V}(s)$, il cui valore dipende dal prezzo del titolo ZCB rilevato in T .

La Figura 3.4 rappresenta graficamente il flusso di un FZCB. Una volta noto il tasso $i(T, s)$, per ogni euro investito in T si otterrà, in s , un importo maggiore di uno:

$$\mathcal{V}(s) = 1 + i(T, s) = M(T, s) = \frac{1}{B(T, s)}. \quad (3.38)$$

Pertanto, qualunque sia il tasso che si manifesterà in T , risulterà:

$$V(T) = \mathcal{V}(s)B(T, s) = 1, \quad (3.39)$$

da cui segue:

$$V(t) = V(T)B(t, T). \quad (3.40)$$

Poiché $V(T) = 1$, si conclude che il prezzo di un FZCB coincide con il prezzo di uno ZCB riferito all'intervallo $[t, T]$:

$$V(t) = B(t, T). \quad (3.41)$$

La Figura 3.5 illustra graficamente la conclusione del ragionamento appena svolto: il flusso finanziario generato da un FZCB sull'intervallo $[t, s]$ è equivalente a quello di uno ZCB definito sull'intervallo $[t, T]$.

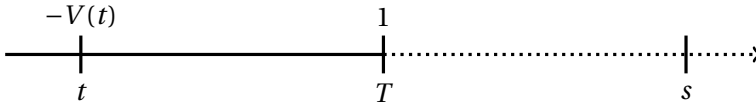


Figura 3.5: Flusso di cassa equivalente a quello generato da un FZCB.

L'interesse corrisposto alla scadenza da un FZCB è dato da:

$$\mathcal{C}(s) = \mathcal{V}(s) - 1 = i(T, s), \quad (3.42)$$

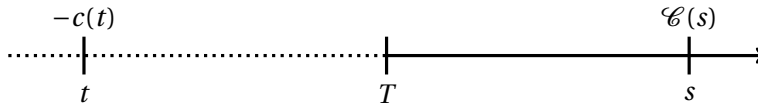


Figura 3.6: *Flusso di cassa di una cedola unitaria indicizzata.*

dove $\mathcal{V}(s)$ rappresenta il valore nominale rimborsato in s e $\mathcal{C}(s)$ la cedola nominale associata.

Il flusso di cassa di una **cedola unitaria indicizzata** è rappresentato graficamente in Figura 3.6. Il valore della cedola in T è noto alla data T , poiché il FZCB è indicizzato al tasso registrato in tale epoca. Si ha quindi:

$$c(T) = i(T, s)B(T, s) = [M(T, s) - 1]B(T, s) = 1 - B(T, s). \quad (3.43)$$

Il valore attuale della stessa cedola, alla data $t < T$, è dato da:

$$c(t) = [1 - B(T, s)]B(t, T) = B(t, T) - B(t, T)B(T, s) = B(t, T) - B(t, s). \quad (3.44)$$

La (3.44) mostra che il valore attuale della cedola indicizzata è equivalente al flusso di due importi unitari di segno opposto, con valori attuali rispettivamente $B(t, T)$ e $B(t, s)$.

Questa relazione è stata derivata assumendo che il modello d'interesse sia **scindibile**, ossia che $B(t, s) = B(t, T)B(T, s)$. Come già osservato, tale proprietà raramente si verifica nei mercati reali; tuttavia, si dimostrerà che la (3.44) rimane valida in ipotesi più generali, purché valga la condizione di **assenza di arbitraggio**.

Di norma, le cedole dei titoli indicizzati includono uno **spread** θ , che rappresenta un premio aggiuntivo rispetto al tasso di riferimento. In tal caso, la cedola nominale diventa:

$$\mathcal{C}(s) = \mathcal{V}(s) - 1 + \theta = i(T, s) + \theta.$$

Si lascia al lettore la verifica che il valore attuale della cedola maggiorata dello spread θ è dato da:

$$c(t) = B(t, T) - B(t, s) + \theta B(t, s) = B(t, T) + (\theta - 1)B(t, s). \quad (3.45)$$

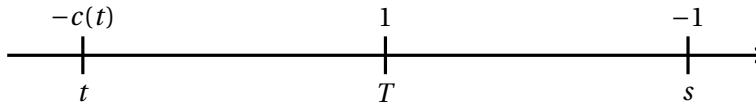


Figura 3.7: Flusso di cassa equivalente al valore attuale di una cedola unitaria indicizzata.

Esempio 3.9. Determinare il valore in $t = 0$ di un FZCB con scadenza annuale e valore facciale pari a €1,000,000, indicizzato al tasso dei BOT semestrali che si realizzerà fra sei mesi.

Ponendo $t = 0$, si ha $T = 0.5$ ed $s = 1$. Se in T il tasso del BOT con scadenza a sei mesi risulta pari a $i(0.5, 1) = 4\%$, l'investitore riceverà in s , per ogni unità di valore facciale, un ammontare pari a:

$$M(0.5, 1) = (1 + 0.04)^{0.5} = 1.019803903,$$

ossia un importo complessivo di:

$$€1,000,000 \times 1.019803903 = €1,019,803.90.$$

La cedola, per unità di valore facciale, risulta quindi pari a:

$$\mathcal{C}(1) = 1.98\%,$$

corrispondente a un ammontare complessivo di:

$$€1,000,000 \times 0.01980 = €19,803.90.$$

Per determinare il valore del titolo in $t = 0$, occorre calcolare il prezzo a pronti del titolo scontato ai tassi di mercato. Se in $t = 0$ il rendimento di un BOT a sei mesi è pari a $i(0, 0.5) = 4.5\%$, allora, per ogni euro di valore facciale, l'investitore pagherà:

$$B(0, 0.5) = (1 + 0.045)^{-0.5} = 0.978231976,$$

ossia un controvalore totale pari a:

$$€1,000,000 \times 0.978231976 = €978,231.98.$$

Il valore della cedola in $t = 0$ sarà quindi:

$$c(0) = B(0, 0.5) - B(0, 1) = 0.978231976 - 0.952380952 = 0.025851024,$$

dove $i(0, 1) = 5\%$ e $B(0, 1) = (1 + 0.05)^{-1} = 0.952380952$.

*Il lettore determini il valore della cedola, per lo stesso ammontare di valore facciale, nel caso in cui il tasso sia maggiorato di uno **spread** $\theta = 0.30\%$ (ossia 30 basis point).* ■

3.7.2 Titoli a tasso variabile

I titoli a tasso variabile, o **Floating Rate Notes** (FRN), rappresentano la categoria più comune di titoli indicizzati disponibili sul mercato. La loro struttura è analoga a quella dei titoli a cedola fissa, con la differenza che la cedola corrisposta periodicamente è indicizzata a un tasso di mercato di breve periodo (al quale, di norma, viene aggiunto uno **spread**). In Italia, i FRN emessi dal Tesoro sono denominati **Certificati di Credito del Tesoro** (CCT).

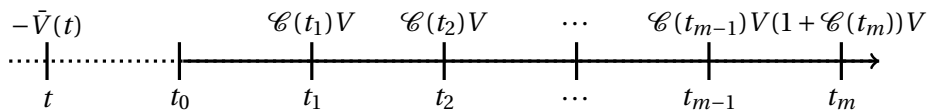


Figura 3.8: Rappresentazione del flusso finanziario di un CCT, ovvero un titolo a tasso variabile indicizzato a un tasso di mercato di breve periodo.

Si indichi con t l'istante di valutazione, con t_0 la data di emissione del FRN e con t_k ($k = 1, 2, \dots, m$) le date di pagamento delle cedole.

I CCT di ultima generazione presentano un meccanismo di indicizzazione **puntuale** (o **in arrears**): la cedola futura è determinata in base al tasso EURIBOR a sei mesi rilevato all'inizio del periodo. Ad esempio, se il CCT paga cedole semestrali il 01/08 e il 01/02, la cedola del semestre 01/08–31/01 (pagata il 01/02) è calcolata sulla base del tasso EURIBOR a sei mesi rilevato il giorno 01/08, mentre quella del semestre 01/02–31/07 (pagata il 01/08) dipende dal tasso EURIBOR registrato nella data lavorativa più prossima al 01/02.

All'emissione è nota la cedola pagabile in t_1 ; in t_1 sarà nota quella da corrispondere in t_2 , e così via.

Il valore in t della generica cedola esigibile in t_k è dato da:

$$\begin{aligned} c(t) &= \mathcal{C}(t_k)B(t, t_k) = [\mathcal{V}(t_k) - 1]B(t, t_k) = \\ &= \mathcal{V}(t_k)B(t, t_{k-1})B(t_{k-1}, t_k) - B(t, t_k) = \\ &= B(t, t_{k-1}) - B(t, t_k), \end{aligned} \quad (3.46)$$

dove $B(t, t_k)$ rappresenta il valore attuale, in t , di un euro esigibile in t_k , ossia il prezzo di uno ZCB unitario con scadenza t_k .

Analogamente ai BTP, il valore complessivo di un CCT è dato da:

$$\begin{aligned} \bar{V}(t) &= \sum_{j=1}^m \mathcal{V}(t_j)B(t, t_j) + VB(t, t_m) = \\ &= V \sum_{j=1}^m [B(t, t_{j-1}) - B(t, t_j)] + VB(t, t_m) = \\ &= V[B(t, t_0) - B(t, t_m)] + VB(t, t_m) = VB(t, t_0). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Pertanto, un FRN valutato prima dell'emissione ($t < t_0$) è equivalente a uno ZCB con scadenza t_0 e valore facciale V .

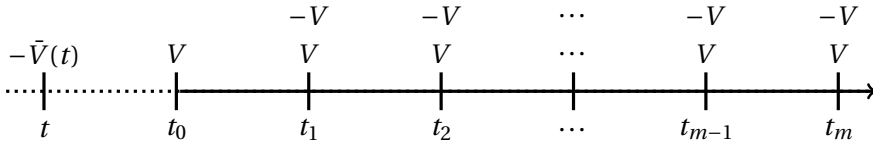


Figura 3.9: Flusso di cassa equivalente di un CCT. Gli importi opposti si compensano, lasciando soltanto il pagamento in t_0 .

Nel caso in cui $t_0 < t < t_1$, la prima cedola è già nota, quindi $\mathcal{C}(t_1) = c_1$. Il valore del CCT sarà:

$$\begin{aligned} \bar{V}(t) &= c_1 VB(t, t_1) + \sum_{j=2}^m \mathcal{V}(t_j)B(t, t_j) + VB(t, t_m) = \\ &= c_1 VB(t, t_1) + V[B(t, t_1) - B(t, t_m)] + VB(t, t_m) = \\ &= VB(t, t_1)(1 + c_1). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Pertanto, il valore di un CCT dopo l'emissione, ma prima della scadenza della prima cedola ($t_0 < t < t_1$), equivale al valore di uno ZCB con valore facciale $V(1 + c_1)$.

Se $t = t_0$, per il meccanismo di indicizzazione, il tasso cedolare è $c_1 = i(t_0, t_1)$. Ne consegue che:

$$\begin{aligned}\bar{V}(t_0) &= VB(t_0, t_1)(1 + c_1) = VB(t_0, t_1)[1 + i(t_0, t_1)] \\ &= VB(t_0, t_1)M(t_0, t_1) = V,\end{aligned}\tag{3.49}$$

cioè il CCT, all'emissione, quota **alla pari**.

Questa è una proprietà fondamentale dei FRN: in qualunque istante prima della scadenza, il valore del titolo dipende solo dal valore facciale V e, se $t_{k-1} < t < t_k$, dalla cedola in corso. Nei punti di pagamento ($t = t_k$) il titolo quoterà sempre alla pari.

Ciò avviene perché il reddito dipende dai tassi futuri: il CCT non è esposto al rischio di variazione dei tassi di mercato. Per contro, nei titoli a cedola fissa (come i BTP), un aumento dei tassi riduce il valore attuale delle cedole future, causando una quotazione sotto la pari, e viceversa.

Se le cedole di un CCT sono maggiorate da uno **spread**, al momento dello stacco la quotazione non sarà perfettamente alla pari: la maggiorazione introduce una componente di cedola fissa. In tal caso, il valore attuale del FRN nei diversi istanti di valutazione è:

$$\bar{V}(t) = \begin{cases} VB(t, t_0) + V\theta \sum_{j=1}^m B(t, t_j), & t < t_0, \\ V + V\theta \sum_{j=k+1}^m B(t, t_j), & t = t_k, \\ VB(t, t_k)(1 + c_k + \theta) + V\theta \sum_{j=k+1}^m B(t, t_j), & t_{k-1} < t < t_k. \end{cases}\tag{3.50}$$

Esempio 3.10. *Determinare il prezzo in data 09/10/2024 del CCT IT000367356, la cui cedola in corso è pari a $c = 2.50\%$, con pagamento previsto il 01/04/2025. Si ipotizzi che, per operazioni sull'intervallo di ampiezza $t_k - t = 174$ giorni, il tasso di mercato sia $i(t, t_k) = 3.37\%$ su base annua.*

Ponendo $t = 0$, si ha $t_k - t = 174$ giorni. Il fattore di sconto relativo al periodo considerato è:

$$B(t, t_k) = (1 + 0.0337)^{-174/365} = 0.984324.$$

Il prezzo del CCT, per ogni unità di valore facciale, risulta quindi:

$$\bar{V}(0) = B(t, t_k) \cdot (1 + c) = 0.984324 \times (1 + 0.025) = 1.008932.$$

3.8 Titoli indicizzati all'inflazione — BTP Italia e BTP€i

I titoli di Stato indicizzati all'inflazione appartengono alla categoria dei titoli a reddito variabile, in cui cedole e/o capitale sono legati all'andamento di un indice dei prezzi. In Italia si utilizzano due principali indici di riferimento: l'indice **FOI** (*Prezzi al Consumo per le Famiglie di Operai e Impiegati*), pubblicato mensilmente dall'**ISTAT** e riferito all'andamento dei prezzi sul territorio nazionale, e l'indice **HICP** (*Harmonised Index of Consumer Prices*, ossia Indice Armonizzato dei Prezzi al Consumo), calcolato da **Eurostat** per misurare in modo comparabile l'inflazione nell'area euro.

Nel mercato italiano si distinguono due principali tipologie:

1. **BTP Italia**, indicizzati all'inflazione italiana (indice FOI al netto dei tabacchi);
2. **BTP€i**, indicizzati all'inflazione dell'area euro (indice HICP ex tabacco pubblicato da Eurostat).

Entrambe le tipologie offrono protezione contro la perdita di potere d'acquisto, ma differiscono nel meccanismo tecnico di rivalutazione e nella frequenza di pagamento delle cedole. Il loro funzionamento può essere interpretato come un'estensione degli FRN presentati in precedenza (vedi Eq. 3.47), dove la cedola non è più agganciata a un tasso monetario ma a un indice dei prezzi.

BTP Italia

Il **BTP Italia** è concepito per il risparmiatore retail e offre cedole semestrali rivalutate secondo l'indice FOI nazionale. Sia V il valore facciale del titolo, c il tasso cedolare annuo espresso in unità di valore facciale e CI_t il coefficiente d'indicizzazione relativo alla data t .

La cedola per unità di valore facciale è definita da:

$$\mathcal{C}(t) = \frac{c}{2} \max(CI_t, 1),$$

cosicché la cedola effettivamente pagata risulta $\mathcal{C}(t)V$. In caso di inflazione negativa ($CI_t < 1$), l'investitore riceve comunque la cedola minima non indicizzata.

La rivalutazione del capitale riconosciuta semestralmente (solo in caso di inflazione positiva) è:

$$\Delta V_t = V \max(CI_t - 1, 0),$$

e quindi la remunerazione complessiva semestrale risulta:

$$\mathcal{R}(t) = \mathcal{C}(t)V + \Delta V_t.$$

Rateo e indicizzazione

Nel caso di compravendita del titolo tra due date cedolari, il rateo maturato comprende due componenti:

$$RC_{d,m} = AC \times \frac{c}{2} V CI_{d,m}, \quad RRC_{d,m} = V \times \frac{P}{100} (CI_{d,m} - 1),$$

dove AC rappresenta la frazione di cedola maturata e $CI_{d,m}$ è il coefficiente FOI pubblicato per la data di regolamento (d, m) . Il rateo complessivo da corrispondere al venditore sarà:

$$R_{d,m} = RC_{d,m} + RRC_{d,m}.$$

Esempio 3.11. *Determinare la cedola reale, la variazione del valore nominale e il rateo di un BTP Italia.*

Si consideri il **BTP Italia maggio 2025** (ISIN IT0005410912), con tasso cedolare $c = 1.4\%$, scadenza il 26 maggio 2025 e valore nominale $V = \text{€}1,000$. Al pagamento della sesta cedola semestrale (26 maggio 2023), il coefficiente di indicizzazione risulta pari a $CI_6 = 1.04096$. Il valore della cedola, rivalutato in base al coefficiente d'indicizzazione, è quindi:

$$\mathcal{C}(t)V = \frac{0.014}{2} \times \text{€}1,000 \times 1.04096 = \text{€}7.28672.$$

L'incremento del capitale nominale dovuto all'indicizzazione è:

$$\Delta V_t = \text{€}1,000 \times (1.04096 - 1) = \text{€}40.96.$$

Pertanto, l'ammontare complessivo pagato alla data cedolare è:

$$\mathcal{R}(t) = \text{€}(7.28672 + 40.96) = \text{€}48.2467.$$

Rateo dopo lo stacco cedolare

Dopo il pagamento della cedola, il titolo prosegue il suo periodo di godimento cedolare. Si ipotizzi che il titolo sia acquistato il 21 luglio 2023

al prezzo $P = 98.321$, con 56 giorni maturati su 184 ($AC\% = \frac{0.014}{2} \times \frac{56}{184}$) e coefficiente d'indicizzazione $CI_{21,\text{lug}} = 1.00366$. Il rateo cedolare rivalutato risulta quindi:

$$RC_{21,\text{lug}} = \left(\frac{0.014}{2} \times \frac{56}{184} \right) \times \text{€}1,000 \times 1.00366 = \text{€}2.13823.$$

La rivalutazione del capitale maturata nello stesso intervallo è:

$$RRC_{21,\text{lug}} = \text{€}1,000 \times \frac{98.321}{100} \times (1.00366 - 1) = \text{€}3.59854.$$

Infine, la componente totale maturata (rateo complessivo) è pari a:

$$R_{21,\text{lug}} = \text{€}(2.13823 + 3.59854) = \text{€}5.73677.$$

BTP€i (BTP indicizzati all'inflazione europea)

I **BTP€i** (o BTPei) sono titoli di stato destinati prevalentemente a investitori istituzionali e indicizzati all'indice armonizzato dei prezzi al consumo dell'area euro (HICP ex tabacco) calcolato da **Eurostat**. Il meccanismo è analogo a quello dei BTP Italia, ma con due differenze sostanziali:

1. le cedole sono corrisposte annualmente (anziché semestralmente);
2. la rivalutazione del capitale avviene interamente alla scadenza.

Il coefficiente d'indicizzazione alla data t è indicato con RI_t (*Reference Index*), ottenuto dall'indice HICP con un ritardo di due mesi rispetto alla data di godimento. La cedola reale unitaria è:

$$\mathcal{C}(t) = c RI_t,$$

e il capitale rivalutato alla scadenza s è:

$$V(s) = V \times \frac{RI_s}{RI_0}.$$

Il valore attuale del titolo in t è quindi:

$$\bar{V}(t) = \sum_{j=1}^m V c RI_{t_j} B(t, t_j) + V \frac{RI_s}{RI_0} B(t, s),$$

dove $B(t, t_j)$ è il prezzo di uno ZCB unitario con scadenza t_j .

In presenza di deflazione, i BTP€i garantiscono comunque il **rimborso minimo del capitale nominale**, poiché $\frac{RI_s}{RI_0} \geq 1$. L'investitore quindi non subisce perdite reali di capitale, sebbene le cedole possano ridursi in funzione dell'inflazione effettiva.

Esempio 3.12. *Determinare l'ammontare di rimborso e la cedola reale alla scadenza di un BTP indicizzato all'inflazione europea (BTP€i).*

Si consideri un **BTP€i** con valore nominale $V = €10,000$, tasso cedolare reale $c = 2.0\%$, durata pari a 5 anni e coefficiente iniziale dell'indice dei prezzi $RI_0 = 100.00$. Alla scadenza, l'indice armonizzato dei prezzi risulta $RI_s = 109.50$.

Il capitale rivalutato alla scadenza, in funzione dell'andamento dell'indice, è:

$$V(s) = €10,000 \times \frac{RI_s}{RI_0} = €10,000 \times \frac{109.50}{100} = €10,950.$$

La cedola reale, calcolata sul capitale rivalutato, ammonta a:

$$\mathcal{C}(s)V = c \times €10,000 \times \frac{RI_s}{RI_0} = 0.02 \times €10,000 \times \frac{109.50}{100} = €219.$$

Pertanto, l'importo complessivo percepito a scadenza — somma del capitale rivalutato e della cedola — è:

$$\text{Rimborso totale} = €(10,950 + 219) = €11,169.$$

Sintesi comparativa

Come per i *Floating Rate Notes* descritti in precedenza, anche i titoli indicizzati all'inflazione possono essere interpretati come una sequenza di cedole aleatorie, dove la variabilità è determinata non dai tassi monetari di mercato ma dall'andamento dei prezzi al consumo. Il legame formale con i FRN (Eq. 3.47) consente di estendere le tecniche di valutazione obbligazionaria a questa classe di strumenti, con opportuni adattamenti relativi all'indicizzazione dei flussi cedolari e del capitale.

Caratteristica	BTP Italia	BTP€i
Indice di riferimento	FOI (Italia, esclusi tabacchi)	HICP ex tabacco (Area euro)
Frequenza cedole	Semestrale	Annuale
Rivalutazione del capitale	In ciascuna cedola (semestrale)	Solo a scadenza
Tasso cedolare	Fisso reale	Fisso reale
Protezione in deflazione	Cedola minima garantita	Rimborso nominale minimo

Tabella 3.8: Confronto tra BTP Italia e BTP€i

3.9 I mutui indicizzati

I mutui a tasso variabile (**MTV**) sono caratterizzati da rate nelle quali la quota interesse è indicizzata a un tasso di riferimento (tipicamente l'EURIBOR). Dato il debito residuo D_{k-1} e il tasso di riferimento $l(t_{k-1}, t_{k-1} + \tau)$, la quota interesse relativa al k -esimo periodo è nota all'epoca t_{k-1} ed è pari a:

$$\mathcal{I}_k = \mathcal{C}(t_k)D_{k-1} = l(t_{k-1}, t_{k-1} + \tau)D_{k-1}.$$

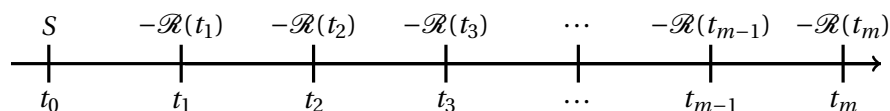


Figura 3.10: Schema di ammortamento di un mutuo a tasso variabile (MTV).

Dato lo scadenziario $\bar{t} = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$, a ogni epoca t_k ($k = 1, 2, \dots, m$) corrisponde il pagamento di una rata $\mathcal{R}_k$ composta da una quota capitale C_k , nota alla stipula del contratto, e da una quota interesse $\mathcal{I}_k$, aleatoria fino a t_{k-1} :

$$\mathcal{R}_k = C_k + \mathcal{I}_k.$$

Nella pratica, in un MTV si determina il flusso delle quote capitali — spesso costanti — imponendo la condizione:

$$\sum_{j=1}^m C_j = S,$$

dove S è il capitale finanziato. Poiché $D_0 = S$ e $D_k = D_{k-1} - C_k$, risulta noto anche il flusso dei debiti residui, sui quali si applica il tasso $l(t_{k-1}, t_{k-1} + \tau)$ (noto in t_{k-1}) per calcolare la quota interesse $\mathcal{I}_k$.

Come si osserva nella Figura 3.10, un MTV presenta la stessa struttura di un **Floating Rate Note** (FRN), in cui le rate $\mathcal{R}_k$ sono assimilabili alle cedole aleatorie del titolo.

Valutazione ante stipula

Se l'istante di valutazione precede la stipula del contratto ($t < t_0$), il valore attuale del mutuo è:

$$\begin{aligned}\bar{A}(t) &= \sum_{j=1}^m \mathcal{R}(t_j) B(t, t_j) \\ &= \sum_{j=1}^m [C_j B(t, t_j) + \mathcal{C}(t_j) D_{j-1} B(t, t_j)] \\ &= \sum_{j=1}^m \{C_j B(t, t_j) + D_{j-1} [B(t, t_{j-1}) - B(t, t_j)]\},\end{aligned}$$

dove $B(t, t_j)$ rappresenta il valore attuale, in t , di un euro esigibile in t_j .

Sviluppando la sommatoria e raggruppando i termini con lo stesso fattore di sconto si ottiene:

$$\begin{aligned}\bar{A}(t) &= D_0 B(t, t_0) + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{m-1} [C_k - (D_{k-1} - D_k)] B(t, t_k) + \\ &\quad + (C_m - D_{m-1}) B(t, t_m).\end{aligned}\tag{3.51}$$

Ricordando che $D_0 = S$, $D_{k-1} - D_k = C_k$ e $C_m = D_{m-1}$, tutti i termini della sommatoria si annullano, tranne il primo:

$$\bar{A}(t) = SB(t, t_0).$$

Pertanto, il flusso rateale, prima della stipula del contratto, è equivalente al prezzo di uno ZCB con valore facciale pari al capitale S .

Valutazione post stipula

Nel caso in cui $t_0 < t < t_1$, la prima quota interesse è già nota e il valore del flusso rateale risulta:

$$\begin{aligned}\bar{A}(t) &= (C_1 + I_1) + \sum_{j=2}^m \{C_j B(t, t_j) + D_{j-1} [B(t, t_{j-1}) - B(t, t_j)]\} \\ &= (C_1 + I_1) + D_1 B(t, t_1) \\ &= (C_1 + I_1 + D_1) B(t, t_1).\end{aligned}$$

Poiché $C_1 + D_1 = S$, segue che:

$$\bar{A}(t) = (S + I_1) B(t, t_1).$$

Nel caso limite $t = t_0$ si ha $\bar{A}(t) = S$, quindi alla stipula l'operazione è equa, come per i mutui a tasso fisso.

Equivalenza valore-debito residuo

A differenza dei mutui a tasso fisso, per un MTV il valore delle rate residue in ogni istante $t = t_k$ ($k = 1, 2, \dots, m$) coincide esattamente con il debito residuo:

$$\bar{A}(t) = D_k.$$

Questa proprietà garantisce che il valore di mercato del flusso rateale sia sempre pari al debito residuo, dove per “valore di mercato” si intende il valore attuale delle rate future scontate ai tassi correnti.

Interpretazione finanziaria

L'erogazione di un mutuo da parte di una banca è, per essa, un'operazione d'impiego analoga all'acquisto di un BTP da parte di un investitore: la banca paga oggi il capitale S e riceve in futuro rate periodiche (le “cedole”), ciascuna composta da una quota capitale e da una quota interesse. Se dopo la stipula i tassi di mercato si riducono, il valore attuale delle rate residue aumenta, come accade per un BTP che quota sopra la pari.

In tal caso, se il mutuatario desidera estinguere anticipatamente il mutuo per accendere un nuovo finanziamento a tasso più basso, la banca richiederà un indennizzo proporzionale alla perdita subita, poiché dovrà reinvestire il capitale rimborsato a un tasso inferiore. Analogamente, se i tassi aumentano, la banca non può richiedere la restituzione immediata

del capitale per reinvestirlo a condizioni più favorevoli, salvo compensare il mutuatario.

Il mutuo a tasso variabile riduce questo rischio per l'istituto di credito, poiché la cedola si adegua ai movimenti del mercato. Per tale motivo, i tassi iniziali dei MTV sono in genere inferiori a quelli dei mutui a tasso fisso. La rischiosità residua è limitata al rischio di credito e all'incertezza sui tassi nel periodo tra due revisioni.

MTV con spread

I mutui a tasso variabile sono di norma indicizzati all'EURIBOR maggiorato di uno **spread**. In questo caso, lo spread rappresenta una componente fissa, e la condizione di equità $\bar{A}(t) = D_k$ non è più verificata. Il valore attuale del flusso rateale risulta:

$$\bar{A}(t) = \begin{cases} SB(t, t_0) + \theta \sum_{j=1}^m D_{j-1} B(t, t_j), & t < t_0, \\ D_k + \theta \sum_{j=k+1}^m D_{j-1} B(t, t_j), & t = t_k, \\ (D_{k-1} + I_k) B(t, t_k) + \theta \sum_{j=k+1}^m D_{j-1} B(t, t_j), & t_{k-1} < t < t_k. \end{cases} \quad (3.52)$$

Capitolo 4

Prezzi e struttura dei tassi

In questo capitolo saranno analizzati i meccanismi che determinano la formazione del prezzo degli strumenti finanziari esaminati nei capitoli precedenti.

Assumendo l'esistenza di un mercato ideale, regolato da specifiche ipotesi sul suo funzionamento, verranno descritte le relazioni fondamentali e le implicazioni finanziarie dei contratti stipulati tra gli operatori economici.

4.1 Ipotesi caratteristiche del mercato

Le ipotesi che definiscono un mercato finanziario ideale possono essere sintetizzate come segue:

- **Non frizionalità:**
 - Non esistono costi di transazione né imposte sulle operazioni finanziarie;
 - I titoli sono infinitamente divisibili;
 - Sono ammesse le *vendite allo scoperto* (*short sales*), ossia è possibile vendere titoli che non si possiedono, equivalenti all'emissione di titoli obbligazionari;
 - Non esiste rischio di insolvenza (*default risk* nullo).
- **Competitività:**
 - Gli operatori agiscono in modo razionale con l'obiettivo di massimizzare il profitto;
 - Nessun singolo operatore ha la capacità di influenzare i prezzi di mercato (mercato concorrenziale perfetto).

- **Assenza di arbitraggi:**

Si definisce **arbitraggio** un'operazione finanziaria che consente di ottenere un profitto certo e privo di rischio, sfruttando disallineamenti temporanei nei prezzi di mercato.

Si distinguono due forme principali di arbitraggio:

- **Arbitraggi di tipo A:** si verificano quando, a fronte di un costo nullo o negativo, si acquista un flusso di importi tutti non negativi, con almeno un pagamento strettamente positivo:

$$c \leq 0, \quad V_j \geq 0 \quad \forall j, \quad \exists k: V_k > 0,$$

dove $\bar{t} = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ rappresenta lo scadenziario dei flussi.

- **Arbitraggi di tipo B:** si verificano quando, a fronte di un costo iniziale negativo, si ottiene un flusso di importi futuri tutti non negativi:

$$c < 0, \quad V_j \geq 0, \quad \forall t_j \in \bar{t}.$$

4.2 Teoremi fondamentali

Sulla base delle ipotesi di mercato introdotte nella Sezione 4.1, è possibile enunciare alcuni teoremi fondamentali che descrivono le proprietà dei **titoli zero-coupon bond (ZCB)** negoziati in un mercato ideale e privo di arbitraggi. Questi teoremi costituiscono il fondamento teorico della valutazione di tutti gli strumenti finanziari a reddito fisso.

4.2.1 Teorema di decrescenza rispetto alla scadenza

In un mercato privo di opportunità di arbitraggio, il prezzo attuale di un titolo zero-coupon deve *diminuire al crescere della scadenza*. Formalmente:

$$B(t, s') > B(t, s''), \quad t \leq s' < s'', \quad (4.1)$$

dove $B(t, s)$ rappresenta il prezzo, al tempo t , di un titolo che paga un'unità monetaria in s .

In altre parole, a parità di condizioni di mercato, un titolo con scadenza più lontana deve avere un prezzo inferiore rispetto a uno con scadenza più ravvicinata. Infatti, quanto più distante è la data di rimborso, tanto

maggiore è il tempo di attesa per ottenere il pagamento, e quindi minore è il valore attuale dell'importo futuro.

Nella Tabella 4.1 sono riportate, a titolo di esempio, le quotazioni dei BOT alla data del 30/04/2025. Si osservi che, all'aumentare della durata residua, il prezzo dei titoli decresce, coerentemente con la relazione (4.1).

La validità della disuguaglianza (4.1) può essere dimostrata per assurdo. Supponiamo infatti che:

$$B(t, s') \leq B(t, s'').$$

Si consideri allora la seguente strategia di arbitraggio:

1. acquistare uno ZCB unitario con scadenza s' ;
2. vendere allo scoperto uno ZCB unitario con scadenza s'' ;
3. al tempo s' , acquistare uno ZCB unitario con scadenza s'' .

Questa combinazione di operazioni genererebbe un profitto certo e privo di rischio, in contraddizione con l'ipotesi di assenza di arbitraggio. Lo schema dei flussi generati dalla strategia di arbitraggio è riportata nella Tabella 4.2.

L'ultima riga della tabella, ottenuta sommando i flussi esigibili alle rispettive date, mostra che la strategia descritta genera un **arbitraggio di tipo A**. Di conseguenza, l'ipotesi assunta per assurdo viola il principio di assenza di arbitraggio, e la disuguaglianza (4.1) risulta pertanto verificata.

In realtà, il mercato non *impone* tale relazione sulla base del teorema dimostrato, ma la *realizza* dinamicamente attraverso il comportamento competitivo degli operatori. Poiché tutti gli agenti dispongono delle stesse informazioni, nel momento in cui si presentasse un'opportunità di arbitraggio come quella descritta, essi tenderebbero a:

- acquistare il titolo con scadenza più ravvicinata (s'), il cui prezzo è sottovalutato;
- vendere allo scoperto il titolo con scadenza più lontana (s''), il cui prezzo è sopravvalutato.

Queste operazioni simultanee provocherebbero un aumento del prezzo $B(t, s')$ e una diminuzione del prezzo $B(t, s'')$, fino a quando la condizione

$$B(t, s') > B(t, s'')$$

ISIN	Descrizione	Ultimo	Scadenza
IT0005595605	Bot Zc May25 A Eur	99.950	14/05/2025
IT0005624447	Bot Zc May25 S Eur	99.854	30/05/2025
IT0005599474	Bot Zc Jun25 A Eur	99.778	13/06/2025
IT0005603342	Bot Zc Jul25 A Eur	99.607	14/07/2025
IT0005633786	Bot Zc Jul25 S Eur	99.519	31/07/2025
IT0005610297	Bot Zc Aug25 A Eur	99.432	14/08/2025
IT0005611659	Bot Zc Sep25 A Eur	99.272	12/09/2025
IT0005643009	Bot Zc Sep25 S Eur	99.177	30/09/2025
IT0005617367	Bot Zc Oct25 A Eur	99.133	14/10/2025
IT0005621401	Bot Zc Nov25 A Eur	98.975	14/11/2025
IT0005627853	Bot Zc Dec25 A Eur	98.828	12/12/2025
IT0005631533	Bot Zc Jan26 A Eur	98.667	14/01/2026
IT0005635351	Bot Zc Feb26 A Eur	98.483	13/02/2026
IT0005640666	Bot Zc Mar26 A Eur	98.338	13/03/2026
IT0005645509	Bot Zc Apr26 A Eur	98.234	14/04/2026

Tabella 4.1: Quotazioni BOT alla data del 30/04/2025. Fonte: <https://www.borsaitaliana.it/borsa/obbligazioni/mot/bot/lista.html>.

t	s'	s''
$-B(t, s')$	1	0
$+B(t, s'')$	0	-1
0	$-B(s', s'')$	1
$B(t, s'') - B(t, s') \geq 0$	$1 - B(s', s'')$	0

Tabella 4.2: Schema dei flussi generati dalla strategia di arbitraggio nel caso $B(t, s') \leq B(t, s'')$.

sarà ristabilita. In equilibrio, dunque, i prezzi dei titoli zero-coupon risultano coerenti con l'assenza di arbitraggi e decrescono all'aumentare della scadenza.

4.2.2 Teorema di linearità del prezzo

Come visto nella Sezione 3.6.1, il prezzo di un BTP si ottiene attualizzando al tempo t le cedole cV e il valore facciale V mediante i fattori di sconto $B(t, t_j)$, con $j = 1, \dots, m$, dati i tassi a pronti $i(t, t_j)$.

Poiché i titoli sono infinitamente divisibili, è sempre possibile costruire un portafoglio contenente V_j unità dello ZCB con scadenza in t_j . Il valore complessivo di tale portafoglio alla data t sarà quindi pari a:

$$\sum_{j=1}^m V_j B(t, t_j). \quad (4.2)$$

L'ipotesi di assenza di arbitraggio impone che il prezzo di un titolo obbligazionario sia pari al valore del portafoglio di titoli zero-coupon che ne replicano i flussi di cassa, ossia:

$$\tilde{V}(t) = \sum_{j=1}^m V_j B(t, t_j). \quad (4.3)$$

Ragionando per assurdo, si ipotizzi che:

$$\tilde{V}(t) < \sum_{j=1}^m V_j B(t, t_j). \quad (4.4)$$

In tale circostanza, un investitore potrebbe attuare una strategia di arbitraggio vendendo allo scoperto gli m ZCB unitari, la cui somma dei

valori attuali è, per ipotesi, superiore al prezzo $\bar{V}(t)$. I proventi derivanti dalla vendita allo scoperto sarebbero sufficienti ad acquistare il titolo obbligazionario $\bar{V}(t)$, che genera gli stessi flussi dei ZCB venduti. La struttura dei flussi generati da tale strategia è riportata nella Tabella 4.3.

t	t_1	t_2	$\dots$	t_m
$-\bar{V}(t)$	$+V_1$	$+V_2$	$\dots$	$+V_m$
$+V_1B(t, t_1)$	$-V_1$	0	$\dots$	0
$+V_2B(t, t_2)$	0	$-V_2$	$\dots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$+V_mB(t, t_m)$	0	0	$\dots$	$-V_m$
$\sum_j V_jB(t, t_j) - \bar{V}(t) > 0$	0	0	0	0

Tabella 4.3: Schema dei flussi generati dalla strategia di arbitraggio nel caso $\bar{V}(t) < \sum_{j=1}^m V_jB(t, t_j)$.

A fronte di un costo iniziale negativo (l'acquisto del titolo $\bar{V}(t)$ finanziato con la vendita allo scoperto di m ZCB), la strategia produce flussi futuri non negativi: si configura pertanto un **arbitraggio di tipo B**. Un arbitraggio analogo si avrebbe invertendo la strategia nel caso opposto, ossia quando

$$\bar{V}(t) > \sum_{j=1}^m V_jB(t, t_j)$$

L'Eqn. (4.3) definisce quindi il **valore attuale**, e dunque il **prezzo di equilibrio**, di un titolo che paga cedole periodiche. In termini generali, essa mostra che il valore attuale di un flusso finanziario si ottiene attualizzando ciascun importo al tasso di mercato corrispondente alla data in cui esso è esigibile.

Da un punto di vista di mercato, il valore attuale di un flusso può essere determinato utilizzando i tassi osservabili per ciascuna scadenza, cioè i tassi impliciti nei prezzi dei titoli zero-coupon. In tal modo, il valore del flusso è coerente con i prezzi di mercato: nessun operatore razionale accetterebbe di pagare un importo superiore o inferiore a tale valore, poiché ciò genererebbe un arbitraggio.

Infine, poiché i prezzi dei ZCB si riferiscono a titoli emessi dallo stato — quindi a strumenti con rischio di insolvenza trascurabile —, nelle

valutazioni di strumenti con maggiore probabilità di default sarà necessario applicare uno **spread di rischio** per tener conto della maggiore rischiosità dell'investimento.

4.2.3 Teorema dei prezzi impliciti

Nella Sezione 1.1.2 sono stati introdotti i concetti di **operazione finanziaria a termine** e di **tasso a termine**. Il flusso finanziario associato a un contratto a termine può essere rappresentato come:

$$\tilde{V} = \{0, -B(t, T, s), 1\},$$

sullo scadenziario $\{t, T, s\}$.

Esiste una relazione ben precisa fra il prezzo a termine $B(t, T, s)$ e i prezzi a pronti relativi alle scadenze T ed s , la cui validità è necessaria per evitare opportunità di arbitraggio. In particolare, deve valere:

$$B(t, T, s) = \frac{B(t, s)}{B(t, T)}, \quad t \leq T \leq s. \quad (4.5)$$

Si osservi che tutte le quantità nella relazione (4.5) sono note in t , poiché dipendono esclusivamente dai prezzi correnti dei titoli zero-coupon.

La dimostrazione della relazione (4.5) procede per assurdo. Supponiamo infatti che:

$$B(t, s) > B(t, T) B(t, T, s), \quad (4.6)$$

e consideriamo la seguente strategia di arbitraggio:

1. vendere allo scoperto uno ZCB unitario con scadenza in s ;
2. acquistare, a pronti, $B(t, T, s)$ unità di uno ZCB unitario con scadenza in T ;
3. acquistare, a termine (per consegna in T), uno ZCB unitario con scadenza in s .

Lo schema dei flussi riportato nella Tabella 4.4 mostra che la strategia descritta conduce a un **arbitraggio di tipo B**.

La relazione (4.5) definisce il legame fondamentale tra **prezzi a pronti** e **prezzi a termine**. Si osservi che essa è formalmente simile alla cosiddetta *proprietà di scindibilità*, secondo cui:

$$B(t, s) = B(t, T) B(T, s).$$

t	T	s
$B(t, s)$	0	-1
$-B(t, T)B(t, T, s)$	$B(t, T, s)$	0
0	$-B(t, T, s)$	1
$B(t, s) - B(t, T)B(t, T, s) > 0$	0	0

Tabella 4.4: Schema dei flussi generati dalla strategia di arbitraggio nel caso $B(t, s) > B(t, T)B(t, T, s)$.

Tuttavia, le due relazioni hanno significati profondamente diversi. La (4.5) è una relazione di equilibrio fondata sul principio di assenza di arbitraggio e, pertanto, deve sempre valere in un mercato efficiente. La proprietà di scindibilità, invece, non si verifica mai nei mercati reali: per essere valida, dovrebbe infatti risultare $B(T, s) = B(t, T, s)$, ossia il prezzo in T di uno ZCB con scadenza in s dovrebbe coincidere con il prezzo, osservabile in t , di un contratto a termine che prevede la consegna dello stesso titolo in T . In pratica, tale equivalenza non si realizza poiché i prezzi futuri $B(T, s)$ sono aleatori e riflettono l'evoluzione dei tassi di mercato.

Alcune teorie interpretano i tassi a termine come *stime non distorte* dei futuri tassi spot, nel senso che il valore atteso del tasso spot futuro coincide con il tasso forward osservato oggi. Ciò non implica, tuttavia, che il tasso spot futuro assumerà effettivamente il livello previsto. Dalla relazione (4.5) si deduce infatti che il prezzo a termine è espresso come rapporto tra due prezzi spot, entrambi variabili nel tempo in funzione dei tassi di mercato correnti.

Un'applicazione diretta del teorema dei prezzi impliciti è rappresentata dalla determinazione del tasso del forward rate agreement. Si può dimostrare che, all'avvio del contratto, il tasso FRA è fissato in modo tale che:

$$\frac{1}{1 + FRA_{T \times s} \frac{\tau}{n}} = \frac{L(t, s)}{B(t, T)}, \quad (4.7)$$

dove $L(t, s)$ rappresenta il valore attuale, alla data t , di un euro esigibile in s al tasso EURIBOR $l(t, s)$.

La dimostrazione può essere condotta mediante lo stesso principio di arbitraggio utilizzato per la (4.5). Si osservi che la relazione (4.7) è formalmente analoga alla (4.5), con la differenza che il prezzo spot al numeratore è calcolato sulla base del tasso EURIBOR anziché del tasso

privo di rischio. La ragione di tale differenza risiede nel fatto che uno dei passaggi del portafoglio di arbitraggio prevede la vendita allo scoperto di un titolo ZCB, operazione che nella pratica equivale a un finanziamento ad un tasso privo di rischio. Poiché nella realtà i finanziamenti avvengono tipicamente a tassi interbancari (EURIBOR o tassi equivalenti), la relazione deve essere adattata di conseguenza.

La strategia finanziaria che conduce alla (4.7) può essere descritta come segue:

1. acquistare in t uno ZCB unitario con scadenza in T ;
2. finanziare tale acquisto prendendo a prestito $(1 + X \frac{T}{n})$ euro al tasso EURIBOR $l(t, s)$.

Il valore, in t , del portafoglio così costruito è:

$$\bar{V}(t) = B(t, T) - (1 + X \frac{T}{n}) L(t, s) = 0. \quad (4.8)$$

Alla data T , lo stesso portafoglio avrà valore:

$$\bar{V}(T) = 1 - (1 + X \frac{T}{n}) L(T, s), \quad (4.9)$$

dove:

$$L(T, s) = \frac{1}{1 + l(T, s) \frac{T}{n}}. \quad (4.10)$$

Sostituendo la (4.10) nella (4.9), si ottiene:

$$\bar{V}(T) = 1 - (1 + X \frac{T}{n}) \frac{1}{1 + l(T, s) \frac{T}{n}}. \quad (4.11)$$

Il valore del *FRA* al fixing, supponendo nozionale unitario, è dato da:

$$\begin{aligned} \Lambda(T, s) &= \frac{1 + l(T, s) \frac{T}{n} - [1 + FRA_{T \times s} \frac{T}{n}]}{1 + l(T, s) \frac{T}{n}} = \\ &= 1 - [1 + FRA_{T \times s} \frac{T}{n}] \frac{1}{1 + l(T, s) \frac{T}{n}}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Si osservi che il valore del portafoglio in T coincide con quello del *FRA* alla consegna, a meno del parametro X . Poiché i valori iniziali in t sono nulli, per evitare arbitraggi i pagamenti in T devono essere uguali. Ciò è possibile se, e solo se, $X = FRA_{T \times s}$. Sostituendo tale valore nella (4.8) si ottiene la relazione (4.7).

Esempio 4.1. *Determinare il tasso teorico di un contratto $FRA_{12 \times 18}$ e costruire una strategia di arbitraggio qualora il tasso di mercato risulti superiore al valore teorico.*

Si consideri la seguente situazione di mercato:

- tasso EURIBOR a 18 mesi: $l(0, 18) = 4.2\%$ (base annua);
- prezzo di un BOT a 12 mesi: $B(0, 12) = 0.97$.

Determinazione del tasso teorico FRA

Il valore attuale unitario al tasso EURIBOR per 18 mesi è:

$$L(0, 18) = \left(1 + l(0, 18) \frac{18}{12}\right)^{-1} = \left(1 + 0.042 \frac{18}{12}\right)^{-1} = 0.940734.$$

Applicando la relazione di assenza di arbitraggio (4.7), il tasso FRA teorico risulta:

$$FRA_{12 \times 18} = \left(\frac{B(0, 12)}{L(0, 18)} - 1\right) \frac{12}{6} = \left(\frac{0.97}{0.940734} - 1\right) \frac{12}{6} = 0.06222 = 6.222\%.$$

Verifica della condizione di arbitraggio

Il tasso FRA di mercato è pari a:

$$FRA_{12 \times 18}^M = 10.5\%,$$

che risulta superiore al tasso teorico (6.222%). È quindi possibile un arbitraggio. Calcoliamo i prezzi a termine corrispondenti.

Prezzo a termine di mercato:

$$B^M(0, 12, 18) = \left(1 + FRA_{12 \times 18}^M \frac{6}{12}\right)^{-1} = \left(1 + 0.105 \frac{6}{12}\right)^{-1} = 0.950119.$$

Prezzo a termine teorico:

$$B^*(0, 12, 18) = \frac{L(0, 18)}{B(0, 12)} = \frac{0.940734}{0.97} = 0.969829.$$

Poiché

$$B^M(0, 12, 18) = 0.950119 < 0.969829 = B^*(0, 12, 18),$$

si può costruire una strategia di arbitraggio priva di rischio.

Strategia di arbitraggio

Tempo $t = 0$:

- acquistare $B^*(0, 12, 18)$ unità di ZCB con scadenza a 12 mesi, al prezzo $B(0, 12) = 0.97$;
- finanziare l'acquisto prendendo a prestito al tasso EURIBOR $l(0, 18)$;
- stipulare un contratto a termine per acquistare, a prezzo $B^M(0, 12, 18)$, uno ZCB con consegna in $T = 12$ mesi e scadenza a 18 mesi.

Tempo $T = 12$:

- incassare $B^*(0, 12, 18) = 0.969829$ dagli ZCB acquistati in $t = 0$;
- pagare $B^M(0, 12, 18) = 0.950119$ per il contratto a termine.

Tempo $s = 18$:

- rimborsare il finanziamento iniziale, pari a $0.940734(1 + 0.042\frac{18}{12}) = 1$;
- incassare il valore nominale del titolo ZCB acquistato a termine.

Risultato economico

Il valore del portafoglio è nullo in $t = 0$, mentre al tempo $T = 12$ mesi si ottiene un profitto privo di rischio pari a:

$$0.969829 - 0.950119 = 0.01971.$$

Il flusso positivo in $T = 12$ conferma l'inefficienza del prezzo a termine di mercato e la possibilità di arbitraggio.

	$t = 0$	$T = 12$	$s = 18$
ZCB 12 mesi (acquisto)	$-0.969829 \times 0.97 = -0.940734$	$+0.969829$	0
Finanziamento EURIBOR	$+0.940734$	0	-1
ZCB a termine	0	-0.950119	$+1$
Totale	0	0.01971	0

Tabella 4.5: *Flussi della strategia di arbitraggio sul contratto FRA*

4.2.4 Teorema di valutazione della cedola indicizzata

Il valore attuale di una cedola indicizzata, che paga in s un importo pari al tasso di riferimento realizzatosi nel periodo $[T, s]$, può essere espresso come differenza tra i prezzi di due ZCB con scadenze rispettivamente in T e in s :

$$c(t) = B(t, T) - B(t, s). \quad (4.13)$$

Si ipotizzi per assurdo che:

$$c(t) > B(t, T) - B(t, s). \quad (4.14)$$

In questo caso sarebbe possibile costruire un **arbitraggio di tipo B**, ossia un'operazione a costo iniziale negativo che genera flussi futuri non negativi. La strategia di arbitraggio si articola come segue:

1. vendere allo scoperto in t il valore attuale della cedola indicizzata $c(t)$;
2. acquistare a pronti in t il portafoglio costituito da ZCB unitari con scadenze T e s , per un valore complessivo $B(t, T) - B(t, s)$;
3. acquistare a termine, nell'istante T , $M(T, s)$ unità di ZCB con scadenza in s , dove $M(T, s) = 1 + i(T, s)$ rappresenta il montante unitario corrispondente al tasso effettivo realizzatosi nel periodo $[T, s]$.

L'ultima riga della tabella mostra che la strategia genera un profitto certo e privo di rischio in t , violando il principio di non arbitraggio. Pertanto, l'ipotesi (4.14) è falsa e deve valere la relazione (4.13).

t	T	s
$+c(t)$	0	$-i(T, s) = -M(T, s) + 1$
$-B(t, T)$	+1	0
$+B(t, s)$	0	-1
0	$-B(T, s)M(T, s)$	$+M(T, s)$
$c(t) - B(t, T) + B(t, s) > 0$	0	0

Tabella 4.6: Schema dei flussi generati dalla strategia di arbitraggio nel caso $c(t) > B(t, T) - B(t, s)$.

4.3 Grandezze caratteristiche del mercato

Dato il prezzo di uno *zero-coupon bond* con scadenza in s , il tasso d'interesse associato ad un'operazione finanziaria di durata $s - t$ è definito da:

$$i(t, s) = \left[\frac{1}{B(t, s)} \right]^{\frac{1}{s-t}} - 1. \quad (4.15)$$

Assumendo che l'unità temporale di riferimento sia l'anno, il tasso $i(t, s)$ rappresenta il **tasso spot** (o tasso a pronti) per impieghi di durata $s - t$, espresso su base annuale.

Utilizzando la parametrizzazione del modello esponenziale in funzione dell'intensità istantanea, si ottiene:

$$B(t, s) = e^{-\delta(t, s)(s-t)},$$

da cui segue che l'intensità a pronti (o tasso istantaneo medio) è pari a:

$$\delta(t, s) = -\frac{\ln B(t, s)}{s-t}. \quad (4.16)$$

Poiché il tempo compare al denominatore, l'intensità $\delta(t, s)$ è una grandezza espressa in unità di tempo⁻¹, tipicamente anni⁻¹.

Analogamente, dato il prezzo a termine di uno ZCB con consegna in T e scadenza in s , il tasso forward $i(t, T, s)$ risulta:

$$i(t, T, s) = \left[\frac{1}{B(t, T, s)} \right]^{\frac{1}{s-T}} - 1. \quad (4.17)$$

Se nel mercato sono negoziabili ZCB unitari con scadenza in T ed in s , dalla relazione dei prezzi impliciti (4.5) si ottiene il tasso forward “implicito” nei corrispondenti tassi spot $i(t, T)$ e $i(t, s)$:

$$1 + i(t, T, s) = [1 + i(t, s)] \left[\frac{1 + i(t, s)}{1 + i(t, T)} \right]^{\frac{T-t}{s-T}}.$$

Applicando il teorema dei prezzi impliciti al modello esponenziale, si ricava l'intensità forward:

$$e^{-\delta(t, T, s)(s-T)} = \frac{e^{-\delta(t, s)(s-t)}}{e^{-\delta(t, T)(T-t)}}, \quad (4.18)$$

da cui:

$$\delta(t, T, s) = \frac{\delta(t, s)(s-t) - \delta(t, T)(T-t)}{s-T}. \quad (4.19)$$

Esempio 4.2. *Determinare i tassi spot, i prezzi forward, i tassi forward e le intensità istantanee d'interesse a partire dalle quotazioni dei BOT al 30 aprile 2025.*

La Tabella 4.1 riporta le quotazioni osservate per diverse scadenze. A partire da tali valori si possono ricavare, in modo coerente con l'ipotesi di assenza di arbitraggio, le curve dei tassi spot e forward, nonché le corrispondenti intensità istantanee.

Dati di partenza

$B(0, 14)$	$= 0.99950$	(ISIN IT0005595605),
$B(0, 30)$	$= 0.99854$	(ISIN IT0005624447),
$B(0, 92)$	$= 0.99519$	(ISIN IT0005633786),
$B(0, 153)$	$= 0.99177$	(ISIN IT0005621401).

Tassi spot (base annuale)

Applicando la relazione $B(0, \tau) = (1 + i(0, \tau))^{-\tau/365}$ si ottengono:

$$i(0, 14) = \left(\frac{1}{0.99950} \right)^{\frac{365}{14}} - 1 = 1.31\%,$$

$$i(0, 30) = \left(\frac{1}{0.99854} \right)^{\frac{365}{30}} - 1 = 1.79\%,$$

$$i(0, 92) = \left(\frac{1}{0.99519} \right)^{\frac{365}{92}} - 1 = 1.93\%,$$

$$i(0, 153) = \left(\frac{1}{0.99177} \right)^{\frac{365}{153}} - 1 = 1.99\%.$$

I risultati restano invariati esprimendo la durata in anni, ad esempio:

$$i(0, 30) = \left(\frac{1}{0.99854} \right)^{1/0.082192} - 1 = 1.79\%.$$

Prezzi forward

Dalla relazione (4.5) si ottengono i prezzi a termine impliciti:

$$B(0, 14, 30) = \frac{B(0,30)}{B(0,14)} = 0.99904,$$

$$B(0, 14, 92) = \frac{B(0,92)}{B(0,14)} = 0.99568,$$

$$B(0, 14, 153) = \frac{B(0,153)}{B(0,14)} = 0.99226.$$

Variazione rispetto alla data di consegna

Mantenendo fissa la scadenza $s = 153$ giorni e variando la data di consegna T , si ha:

$$B(0, 14, 153) = \frac{B(0,153)}{B(0,14)} = 0.99226,$$

$$B(0, 30, 153) = \frac{B(0,153)}{B(0,30)} = 0.99322,$$

$$B(0, 92, 153) = \frac{B(0,153)}{B(0,92)} = 0.99656.$$

Tassi forward

Il tasso forward relativo all'intervallo (30, 153) risulta:

$$i(0, 30, 153) = \left(\frac{1}{0.99322} \right)^{365/123} - 1 = 2.0393\%.$$

In alternativa, applicando la relazione tra tassi spot e forward:

$$i(0, 30, 153) = [1 + i(0, 153)] \left[\frac{1 + i(0, 153)}{1 + i(0, 30)} \right]^{30/123} - 1 = 2.0393\%.$$

Intensità a pronti e a termine

Le intensità istantanee corrispondenti ai tassi spot sono:

$$\begin{aligned}\delta(0, 14) &= -\frac{\ln B(0, 14)}{14/365} = 0.01304 \text{ anni}^{-1}, \\ \delta(0, 30) &= -\frac{\ln B(0, 30)}{30/365} = 0.01778 \text{ anni}^{-1}, \\ \delta(0, 153) &= -\frac{\ln B(0, 153)}{153/365} = 0.01972 \text{ anni}^{-1}.\end{aligned}$$

Le corrispondenti intensità forward risultano:

$$\begin{aligned}\delta(0, 30, 92) &= \frac{\delta(0, 92) \frac{92}{62} - \delta(0, 30) \frac{30}{62}}{1} = 0.01978, \\ \delta(0, 92, 153) &= \frac{\delta(0, 153) \frac{0.41918}{0.16712} - \delta(0, 92) \frac{0.25205}{0.16712}}{1} = 0.02060.\end{aligned}$$



Capitolo 5

Misure della dispersione

5.1 La Duration

Nel paragrafo 3.6.1 è stato introdotto il **rendimento a scadenza** come misura sintetica della redditività di un flusso finanziario. Si è osservato che tale misura è valida solo sotto due ipotesi fondamentali: (i) che il titolo sia mantenuto fino alla scadenza; (ii) che le cedole intermedie vengano reinvestite allo stesso tasso del rendimento a scadenza. Tale ipotesi, come si è dimostrato, è poco realistica, in quanto i tassi di mercato variano nel tempo. Inoltre, lo YTM non tiene conto della **struttura dei pagamenti**, e quindi della diversa distribuzione temporale dei flussi.

Esempio 5.1. Sul mercato sono disponibili le seguenti due opportunità di investimento:

- un CBB che paga un coupon annuo del 10%, scadenza sei anni, quotato a $\bar{B}(0,6) = 102.21$;
- uno ZCB a sei anni quotato a $B(0,6) = 58.00$.

Entrambi i titoli offrono un rendimento a scadenza pari al 9.5%, da cui si potrebbe erroneamente concludere che le due opportunità siano equivalenti. In realtà, la **struttura dei pagamenti** li rende profondamente differenti. Il CBB distribuisce cedole durante la vita del titolo ed è quindi soggetto al *rischio di reinvestimento*: la redditività effettiva dipende dai tassi a cui le cedole saranno reinvestite. Lo ZCB, invece, concentra tutti

i flussi alla scadenza, risultando più esposto alle variazioni dei tassi di mercato nel tempo.

Si ipotizzi che, alla fine del secondo anno, dopo il pagamento della cedola, lo YTM rimanga invariato al 9.5%. Il prezzo dei titoli, dato dal valore attuale dei pagamenti futuri, sarà:

$$\bar{B}(2, 6) = 101.60, \quad B(2, 6) = 69.56.$$

Se invece lo YTM aumentasse di 50 punti base, raggiungendo il 10%, i prezzi scenderebbero a:

$$\bar{B}'(2, 6) = 100.00, \quad B'(2, 6) = 68.30.$$

Le variazioni percentuali risultano:

$$\frac{\bar{B}'(2, 6) - \bar{B}(2, 6)}{\bar{B}(2, 6)} = -1.577\%, \quad \frac{B'(2, 6) - B(2, 6)}{B(2, 6)} = -1.806\%.$$

Si osservi come il prezzo dello ZCB reagisca in maniera più marcata rispetto al CBB. In altri termini, a parità di YTM iniziale, titoli con diversa struttura dei pagamenti presentano una diversa **sensibilità** alle variazioni del tasso di rendimento. La Figura 5.1 mostra come una riduzione dello YTM produca un maggior apprezzamento dello ZCB rispetto al CBB; tale effetto aumenta per scostamenti più ampi dal tasso iniziale.

L'esempio precedente evidenzia che lo YTM, pur fornendo una misura sintetica della redditività, non è in grado di cogliere la diversa *struttura temporale dei flussi* e, di conseguenza, la diversa sensibilità dei prezzi alle variazioni dei tassi. È dunque necessario introdurre una misura che tenga conto della distribuzione temporale dei pagamenti, e quindi della volatilità del prezzo del titolo rispetto a variazioni della struttura dei tassi.

5.1.1 Un'analogia fisica: il baricentro dei flussi

La dipendenza della volatilità dal livello del coupon può essere intuitivamente rappresentata con un'analogia fisica. Si immagini un asse di legno su cui sono posti quattro contenitori, ciascuno rappresentante un pagamento futuro. Un'estremità dell'asse è sollecitata da oscillazioni

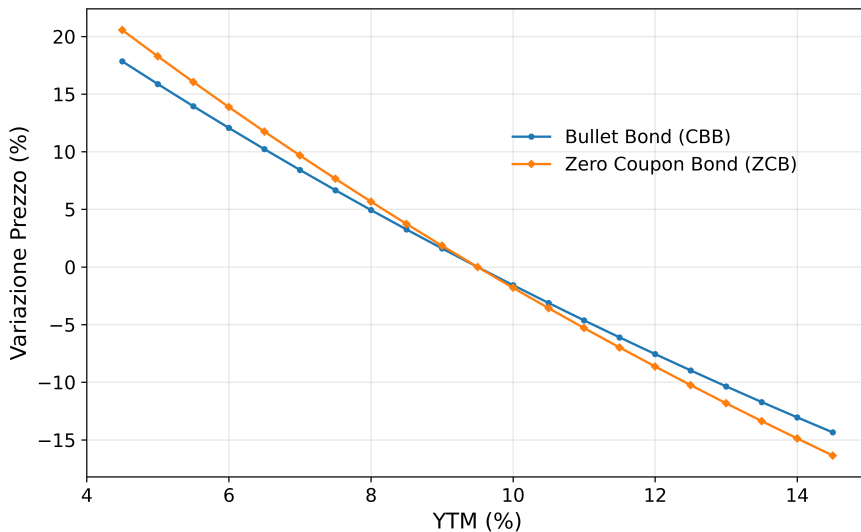


Figura 5.1: Variazioni percentuali del prezzo in funzione dello YTM.

(le variazioni del prezzo), mentre un supporto posto al di sotto serve a mantenerne l'equilibrio.

Nel caso di uno ZCB (Figura 5.2, alto), l'intero pagamento avviene alla scadenza: il baricentro coincide con l'ultimo contenitore. Se si aggiungono pagamenti intermedi (cedole), il supporto — e quindi il baricentro — si sposta verso sinistra: all'aumentare del coupon, la “massa finanziaria” anticipata riduce la distanza media dei flussi futuri.

5.1.2 Definizione formale della duration

Sia $\bar{V} = \{V_1, V_2, \dots, V_m\}$ un flusso finanziario con scadenze $\bar{t} = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$. Definiamo i pesi normalizzati:

$$d_j = \frac{V_j B(t, t_j)}{\sum_{j=1}^m V_j B(t, t_j)}, \quad (5.1)$$

che rappresentano l'importanza relativa del j -esimo pagamento nel valore complessivo del titolo. La **duration** (o *Macaulay duration*) è quindi la media ponderata dei tempi dei pagamenti, con pesi pari ai valori attuali

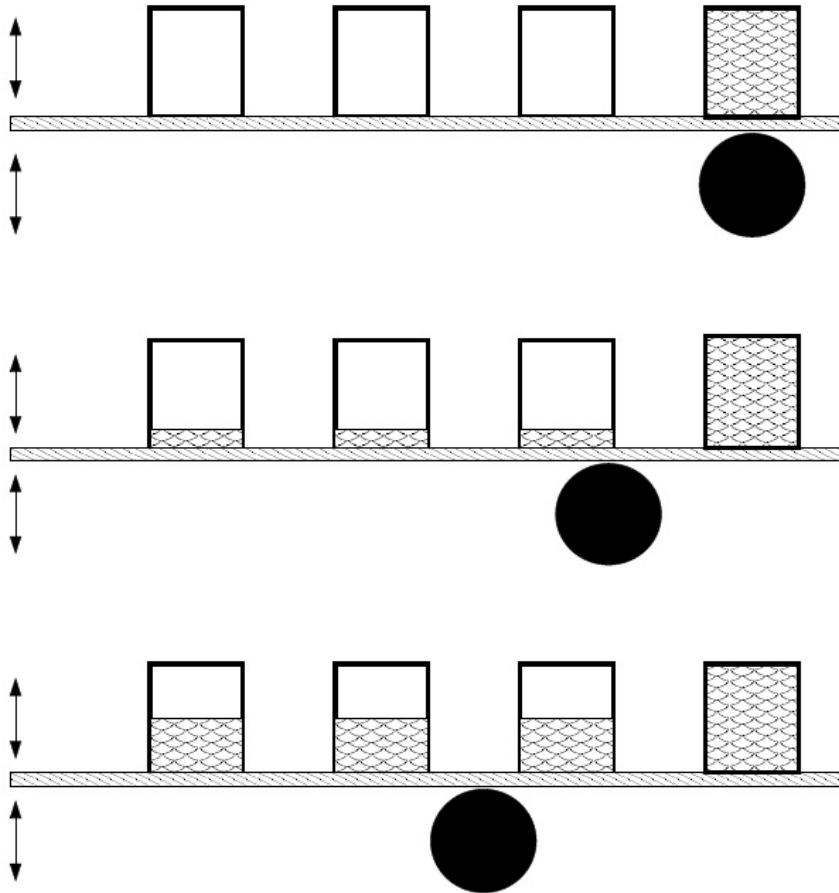


Figura 5.2: La duration rappresenta il baricentro dei valori attuali dei pagamenti futuri. Uno ZCB concentra tutta la massa alla scadenza (alto). All'aumentare della cedola (medio e basso) la duration si riduce e il baricentro si sposta verso sinistra.

dei flussi:

$$D(t, \bar{V}) = \sum_{j=1}^m (t_j - t) d_j.$$

Il denominatore dei pesi d_j coincide con il prezzo del titolo in t , ovvero il valore attuale del flusso finanziario. Per uno ZCB, tutta la “massa” è

concentrata alla scadenza, dunque:

$$D(t, \bar{V}) = t_m - t.$$

In generale, essendo la duration una media, essa soddisfa:

$$t_1 - t \leq D(t, \bar{V}) \leq t_m - t.$$

5.1.3 Duration e struttura dei tassi

Data una struttura dei tassi a pronti osservata in t , la Macaulay duration può essere espressa come:

$$D(t, \bar{V}) = \frac{\sum_{j=1}^m j V_j [1 + i(t, t + j)]^{-j}}{\sum_{j=1}^m V_j [1 + i(t, t + j)]^{-j}}. \quad (5.2)$$

Nel caso di una struttura piatta (*flat yield duration*), ossia con un unico tasso y per tutte le scadenze, si ha:

$$D(t, \bar{V}) = \frac{\sum_{j=1}^m j V_j (1 + y)^{-j}}{\sum_{j=1}^m V_j (1 + y)^{-j}}. \quad (5.3)$$

All'aumentare dello YTM, i pagamenti più lontani pesano meno e la duration diminuisce: il titolo diventa meno sensibile alle variazioni dei tassi.

5.1.4 Misure complementari della duration

La duration esprime, in unità di tempo (anni se le scadenze sono annuali), la **vita media finanziaria** di un titolo, ossia il tempo medio ponderato in cui l'investitore recupera il capitale investito in termini attualizzati. Come vedremo, essa fornisce una misura sintetica della sensibilità del prezzo alle variazioni dei tassi di interesse, ma non è l'unica grandezza utile a descrivere il comportamento di un titolo obbligazionario.

Dollar duration

Una misura derivata di largo impiego operativo è la **dollar duration** (o **basis point volatility**), che quantifica la variazione assoluta del prezzo per un piccolo spostamento dei tassi di interesse. È definita come:

$$DD(t, \bar{V}) = \bar{V}(t) D(t, \bar{V}) = \sum_{j=1}^m (t_j - t) V_j B(t, t_j). \quad (5.4)$$

La dollar duration, espressa in unità monetarie, rappresenta la variazione del valore di mercato del titolo per una variazione infinitesimale (ad esempio di un basis point, pari a 0.01%) del rendimento. È particolarmente utile nelle strategie di *hedging* e di *immunizzazione*, poiché consente di confrontare la sensibilità di strumenti con valori di mercato diversi.

Duration di secondo ordine

Una misura complementare è la **duration di secondo ordine**:

$$D^{(2)}(t, \bar{V}) = \sum_{j=1}^m (t_j - t)^2 d_j, \quad (5.5)$$

dove i pesi d_j sono definiti come nella (5.1.2). Questa grandezza misura la *dispersione temporale* dei pagamenti futuri e fornisce una stima della curvatura della relazione prezzo–tasso. Essa costituisce la base della **convexity**, che corregge la stima lineare fornita dalla duration e permette di approssimare più accuratamente la variazione di prezzo per shock di tasso più ampi.

Duration di portafoglio

Nel caso di un insieme di titoli, la **duration di portafoglio** è data dalla media ponderata delle duration dei singoli componenti:

$$D(t, \bar{\Pi}) = \sum_{i=1}^N d_i D(t, \bar{V}_i) \quad (5.6)$$

$$d_i = \frac{u_i \bar{V}_i(t)}{\bar{\Pi}(t)},$$

dove $\bar{\Pi}(t)$ rappresenta il valore di mercato complessivo del portafoglio e u_i la quantità o il valore nominale detenuto del titolo i -esimo.

La formula mostra che la duration complessiva dipende non solo dalla scadenza e dalla struttura dei flussi dei singoli titoli, ma anche dal loro peso economico nel portafoglio. Un portafoglio concentrato su obbligazioni a lunga scadenza o con cedole basse presenterà una duration elevata e quindi una maggiore esposizione al rischio di tasso; viceversa, la presenza di titoli a breve o con cedole elevate riduce la duration complessiva.

Da un punto di vista operativo, la duration di portafoglio è utilizzata per modulare l'esposizione al rischio di tasso in funzione delle attese di mercato:

- se si prevede una riduzione dei tassi, è opportuno *allungare* la duration, per beneficiare dell'aumento dei prezzi;
- se si prevede un rialzo dei tassi, è preferibile *accorciarla*, per contenere le perdite potenziali.

Nella gestione obbligazionaria la duration di portafoglio svolge un ruolo analogo a quello del coefficiente beta nella gestione azionaria. Come dimostreremo nella sezione seguente, essa misura la *sensibilità sistematica* del valore del portafoglio rispetto ai movimenti della struttura dei tassi. In combinazione con la convexity, consente di costruire portafogli immunizzati, ovvero insensibili — fino al secondo ordine — a variazioni moderate dei tassi d'interesse.

5.2 Semielasticità e Convexity

Si consideri il f.f. $\bar{V} = \{V_1, V_2, \dots, V_m\}$ sullo scadenziario $\bar{t} = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_m\}$, e si ipotizzi una struttura piatta, $i = i(t, t + j)$ per $j = 1, 2, \dots, m$. Il valore del f.f. in $t = 0$ è dato da

$$\bar{V}(0) = \sum_{j=1}^m V_j (1+i)^{-t_j} = \sum_{j=1}^m V_j e^{-\delta t_j}, \quad (5.7)$$

dove $\delta = \ln(1+i)$.

Si ipotizzi inoltre che la struttura, identificata dall'unico parametro i , possa spostarsi mantenendo la forma piatta ma a livelli diversi. La (5.7) può allora essere studiata come funzione del tasso i o dell'intensità δ , così da analizzare il comportamento del prezzo al variare della struttura.

In particolare si ha

$$\bar{V}(i) > 0, \quad \bar{V}(i) = \sum_{j=1}^m V_j \text{ per } i = 0, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \bar{V}(i) = 0,$$

e analogamente

$$\bar{V}(\delta) > 0, \quad \bar{V}(\delta) = \sum_{j=1}^m V_j \text{ per } \delta = 0, \quad \lim_{\delta \rightarrow \infty} \bar{V}(\delta) = 0.$$

Le derivate prima e seconda rispetto a i sono

$$\bar{V}'(i) = - \sum_{j=1}^m t_j V_j (1+i)^{-t_j-1}, \quad (5.8)$$

$$\bar{V}''(i) = \sum_{j=1}^m t_j(t_j+1) V_j (1+i)^{-t_j-2}, \quad (5.9)$$

mentre rispetto a δ si ottiene

$$\bar{V}'(\delta) = - \sum_{j=1}^m t_j V_j e^{-\delta t_j}, \quad (5.10)$$

$$\bar{V}''(\delta) = \sum_{j=1}^m t_j^2 V_j e^{-\delta t_j}. \quad (5.11)$$

Se gli importi sono tutti non negativi, il grafico della relazione (5.7) assume l'andamento illustrato nella Figura 5.3.

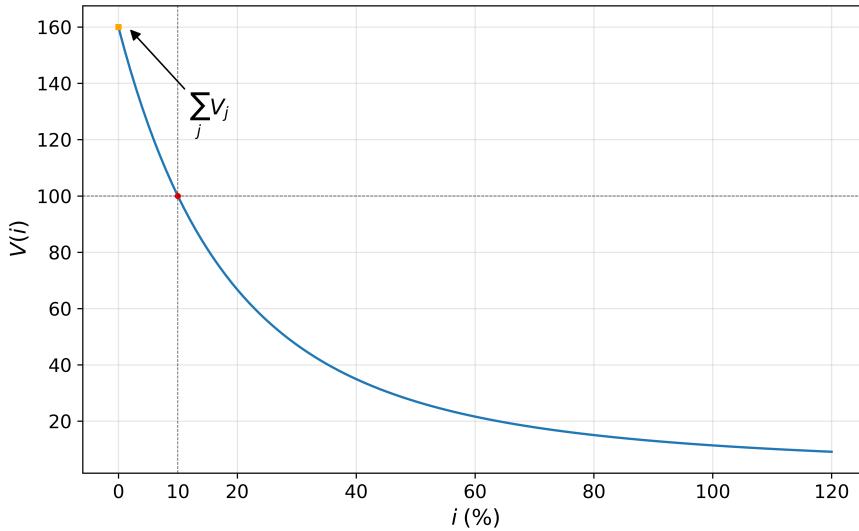


Figura 5.3: Prezzo di un CBB in funzione del tasso. Il quadrato indica il tasso che prezza il CBB alla pari.

La *variazione relativa* (o semielasticità) misura la velocità di variazione del prezzo per unità di capitale ed è definita dal rapporto fra derivata prima

e funzione valore:

$$\begin{aligned}\frac{\bar{V}'(i)}{\bar{V}(i)} &= \frac{-\sum_{j=1}^m t_j V_j (1+i)^{-t_j-1}}{\sum_{j=1}^m V_j (1+i)^{-t_j}} \\ &= -\frac{1}{1+i} \frac{\sum_{j=1}^m t_j V_j (1+i)^{-t_j}}{\sum_{j=1}^m V_j (1+i)^{-t_j}} = -\frac{1}{1+i} D(0, \bar{V}).\end{aligned}\quad (5.12)$$

In funzione dell'intensità:

$$\frac{\bar{V}'(\delta)}{\bar{V}(\delta)} = -\frac{\sum_{j=1}^m t_j V_j e^{-\delta t_j}}{\sum_{j=1}^m V_j e^{-\delta t_j}} = -D(0, \bar{V}).\quad (5.13)$$

La (5.12) è la **modified duration**. Poiché la derivata prima può essere approssimata dal rapporto incrementale,

$$\bar{V}'(i) \simeq \frac{\Delta \bar{V}(i)}{\Delta i},$$

sostituendo in (5.12) si ottiene

$$\frac{\Delta \bar{V}(i)}{\bar{V}(i)} = -\frac{1}{1+i} D(0, \bar{V}) \Delta i.\quad (5.14)$$

La (5.14) lega la variazione relativa del prezzo (tel quel) a traslazioni parallele della struttura dei tassi. La modified duration misura quindi la volatilità del titolo per *shift* additivi piccoli; per shock ampi l'approssimazione lineare può sovra/sottostimare la variazione (è un'approssimazione di primo ordine).

Un'ulteriore misura, legata alla distribuzione temporale dei pagamenti, è la **convexity**, definita come il rapporto tra derivata seconda e prezzo:

$$\begin{aligned}\frac{\bar{V}''(i)}{\bar{V}(i)} &= \frac{\sum_{j=1}^m t_j(t_j+1) V_j (1+i)^{-t_j-2}}{\sum_{j=1}^m V_j (1+i)^{-t_j}} \\ &= \frac{1}{(1+i)^2} [D^{(2)}(t, \bar{V}) + D(0, \bar{V})].\end{aligned}\quad (5.15)$$

Con la parametrizzazione in intensità si verifica che la convexity coincide con la duration di secondo ordine:

$$\frac{\bar{V}''(\delta)}{\bar{V}(\delta)} = \frac{\sum_{j=1}^m t_j^2 V_j e^{-\delta t_j}}{\sum_{j=1}^m V_j e^{-\delta t_j}} = D^{(2)}(t, \bar{V}).\quad (5.16)$$

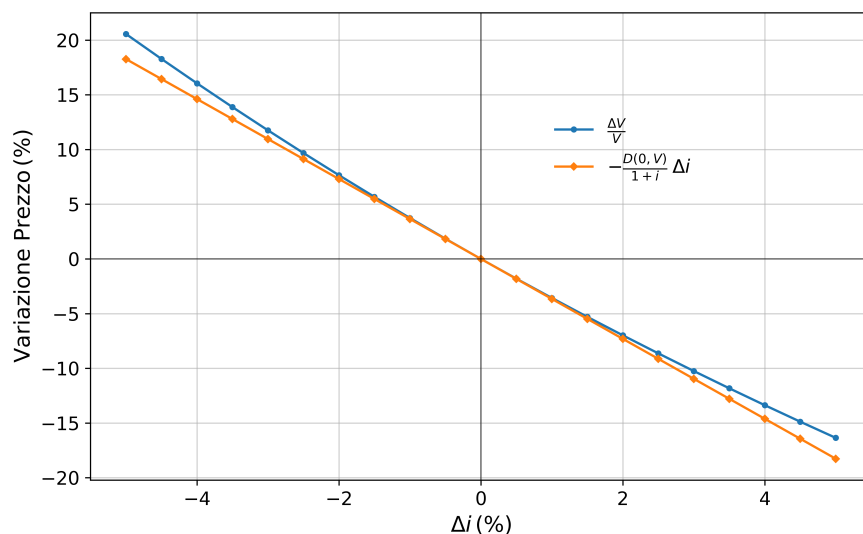


Figura 5.4: Prezzo di uno ZCB in funzione della variazione del tasso e approssimazione tramite modified duration.

Esempio 5.2. Determinare la duration di due titoli e del portafoglio complessivo, e verificare l'effetto di uno shift proporzionale dei tassi.

Si consideri la seguente **struttura dei tassi a pronti**:

τ	$i(0, \tau)$
0.5	0.03295
1.0	0.03436
1.5	0.03572
2.0	0.03703
2.5	0.03829
3.0	0.03951

Sul mercato sono quotati:

- un BTP a 3 anni ($\bar{V}_1$) con cedola annua del 5.5% e prezzo $\bar{B}(0,3) = 1.0451$;

- un ZCB a 2 anni ($\bar{V}_2$) con prezzo $\bar{B}(0,2) = 0.9299$.

I rendimenti a scadenza sono rispettivamente $y(0,3) = 3.931\%$ e $y(0,2) = 3.703\%$.

Obiettivi:

- calcolare la Macaulay e la flat duration di ciascun titolo;
- calcolare la duration del portafoglio con $u_1 = €2,000$ e $u_2 = €4,500$;
- verificare l'effetto di uno shift proporzionale dei tassi pari a 50 bp.

Calcolo della duration dei singoli titoli

Per lo ZCB la duration (Macaulay e flat) coincide con la scadenza:

$$D_{\text{Mac}}(0, \bar{V}_2) = D_{\text{Flat}}(0, \bar{V}_2) = 2.$$

Per il BTP, il calcolo fornisce:

$$D_{\text{Mac}}(0, \bar{V}_1) \approx 2.8105, \quad D_{\text{Flat}}(0, \bar{V}_1) \approx 2.8113.$$

Le corrispondenti modified duration sono:

$$MD(0, \bar{V}_1) = \frac{2.811}{1 + 0.03931} = 2.704, \quad MD(0, \bar{V}_2) = \frac{2}{1 + 0.03703} = 1.929.$$

Effetto di uno shift proporzionale dei tassi

La relazione generale tra variazione del prezzo e variazione proporzionale dei tassi è:

$$\frac{\Delta \bar{V}}{\bar{V}} = -D(0, \bar{V}) \delta i, \quad \delta i = \frac{\Delta i}{1 + i}.$$

Uno *shift proporzionale* di 50 bp implica:

$$\frac{i'(0^+, k\tau) - i(0^+, k\tau)}{1 + i(0^+, k\tau)} = 0.50\%,$$

ovvero

$$i'(0^+, k\tau) = i(0^+, k\tau) + [1 + i(0^+, k\tau)] \times 0.005.$$

Applicando tale variazione:

$$\frac{1.031 - 1.045}{1.045} = -1.392\%,$$

$$\text{previsione da duration: } -2.8105 \times 0.005 = -1.405\%.$$

Per lo ZCB, lo stesso shock produce

$$\frac{0.921 - 0.930}{0.930} = -0.993\%,$$

$$\text{previsione da duration: } -2 \times 0.005 = -1.000\%.$$

Duration del portafoglio

Il valore complessivo del portafoglio (considerando il BTP prima dello stacco cedolare) è:

$$\bar{\Pi}(0) = \text{€}2,000 \times 1.0451 + \text{€}4,500 \times 0.9299 = \text{€}6,274.75.$$

I pesi relativi sono:

$$d_1 = \frac{2,000 \times 1.0451}{6,274.75} = 0.3331, \quad d_2 = \frac{4,500 \times 0.9299}{6,274.75} = 0.6669.$$

Pertanto:

$$D(0, \bar{\Pi}) = 0.3331 \times 2.8105 + 0.6669 \times 2.000 = 2.270.$$

Interpretazione

La duration del portafoglio misura la sensibilità del valore del portafoglio a variazioni dei tassi. In questo caso, una riduzione dei tassi dell'1% comporterebbe un incremento del valore del portafoglio di circa il 2.27%. Come si vedrà nel Capitolo 9, nei fondi obbligazionari la variazione della duration riflette scelte gestionali basate sulle aspettative sui tassi di interesse. ■

Capitolo 6

Criteri di scelta finanziaria

Le operazioni finanziarie possono essere interpretate in senso ampio come forme di investimento: insiemi di esborsi iniziali seguiti da flussi di cassa positivi che si realizzano in un determinato orizzonte temporale. Non vi è, da un punto di vista concettuale, alcuna differenza sostanziale tra gli *investimenti reali* — ossia investimenti in attività produttive — e gli *investimenti finanziari*, come l'acquisto di un'obbligazione o di un titolo azionario. La distinzione riguarda piuttosto la natura dei flussi di cassa: negli investimenti finanziari, la sequenza e la tempistica dei flussi sono definite contrattualmente, e i titoli che li rappresentano possono essere negoziati sui mercati; negli investimenti reali, tali flussi derivano dall'attività operativa e sono soggetti a maggiore incertezza.

Valutare un'attività di investimento significa determinarne il valore di mercato, ossia il prezzo che gli operatori sono disposti a pagare oggi per ottenere i flussi di cassa futuri associati all'investimento. In finanza, la determinazione del prezzo di un'attività si basa sul principio della **valutazione per confronto**: un'attività deve avere lo stesso valore di un portafoglio di attività finanziarie che ne replica perfettamente i flussi di cassa.

Ad esempio, un titolo obbligazionario biennale con cedola annuale può essere visto come un portafoglio composto da due *ZCB*: il primo con scadenza in $t_1 = 1$ e valore facciale pari alla cedola; il secondo con scadenza in $t_2 = 2$ e valore facciale pari alla somma di cedola e di valore nominale del titolo. Poiché i due strumenti generano gli stessi flussi di cassa ai tempi t_1 e t_2 , in condizioni di assenza di arbitraggio devono avere lo stesso prezzo al tempo $t_0 = 0$. Se così non fosse, sarebbe possibile costruire una strategia

di arbitraggio e ottenere un profitto certo sfruttando la discrepanza tra i prezzi.

Lo stesso principio può essere applicato agli investimenti in attività produttive. Il valore di un progetto reale al tempo $t_0 = 0$ è pari al valore del **portafoglio replicante** (*tracking portfolio*), ossia del portafoglio di attività finanziarie che riproduce la struttura temporale dei flussi di cassa generati dal progetto. L'investimento sarà conveniente se il suo costo iniziale è inferiore al valore di mercato dell'investimento, ossia al prezzo del portafoglio replicante.

In questo senso, il valore creato da un investimento reale equivale al profitto di arbitraggio ottenibile acquistando il progetto e vendendo allo scoperto il portafoglio finanziario che ne replica i flussi. Tutti i metodi di valutazione degli investimenti reali (**capital budgeting methods**) si fondano su questa logica di equivalenza e mostrano che la creazione di valore dipende dalla possibilità di generare opportunità di arbitraggio tra il mercato delle attività reali e quello delle attività finanziarie.

Pertanto, i passi fondamentali di una valutazione corretta sono due:

1. individuare in modo appropriato i flussi di cassa dell'investimento;
2. identificare il portafoglio di attività finanziarie in grado di replicarne la struttura.

6.1 Valore Attuale Netto (VAN)

Si indichi con $t_0 = 0$ l'istante di valutazione e si assuma che un progetto di investimento generi una sequenza di flussi di cassa **certi**

$$\{C_0, C_1, \dots, C_m\}.$$

Il **Valore Attuale Netto (VAN)** – o **Risultato Economico Attualizzato (REA)** – o **Net Present Value (NPV)** – rappresenta la differenza tra il valore attuale dei flussi di cassa futuri e l'esborso iniziale del progetto. Formalmente:

$$VAN(t_0) = C_0 + \frac{C_1}{1 + i_1} + \frac{C_2}{(1 + i_2)^2} + \dots + \frac{C_m}{(1 + i_m)^m}, \quad (6.1)$$

dove i_t indica il rendimento uniperiodale a scadenza di uno *zero-coupon bond* (ZCB) con scadenza in t . In altri termini, ciascun flusso futuro viene attualizzato utilizzando il tasso coerente con la scadenza corrispondente.

Nei moderni fogli di calcolo, il VAN può essere calcolato in modo automatico. In *Excel*, le funzioni $VAN()$ e $VAN.X()$ permettono di ottenere il valore attuale netto per flussi di cassa regolari o irregolari, rispettivamente.

6.1.1 Valutazione di un singolo progetto di investimento

Secondo la **regola del VAN**, un progetto di investimento deve essere accettato **se e solo se** il suo valore attuale netto risulta **positivo**, cioè $VAN > 0$. Un VAN positivo indica che il valore attuale dei flussi di cassa futuri eccede il costo iniziale del progetto, generando quindi un incremento di valore per l'investitore o per l'impresa.

Se i flussi di cassa dell'investimento sono privi di rischio, è possibile costruire un portafoglio di *ZCB* che replichi esattamente la loro struttura temporale. In tale contesto, adottare un progetto il cui costo iniziale C_0 sia inferiore al valore di mercato del portafoglio replicante (cioè con $VAN > 0$) equivale a individuare un'opportunità di **arbitraggio di tipo B**, ossia un'operazione che genera un profitto certo senza esposizione al rischio.

Il criterio del VAN, pertanto, fornisce una condizione di coerenza con il principio di assenza di arbitraggio: solo gli investimenti che creano valore rispetto al portafoglio replicante dovrebbero essere accettati.

Esempio 6.1. Si consideri un progetto di investimento caratterizzato dai seguenti flussi di cassa (importi in migliaia di euro). Determinare se il progetto genera un profitto certo, confrontandolo con il portafoglio di attività finanziarie che replica i suoi flussi di cassa.

t	0	1	2	3
C_t	-20	40	-10	30

Per replicare la struttura dei flussi di cassa del progetto, si consideri la seguente strategia di compravendita di *ZCB*:

1. vendita allo scoperto di *ZCB* con scadenza $t = 1$ per un valore facciale complessivo di €40,000;

2. acquisto di ZCB con scadenza $t = 2$ per un valore facciale di €10,000;
3. vendita allo scoperto di ZCB con scadenza $t = 3$ per un valore facciale complessivo di €30,000.

I flussi di cassa risultanti dalla combinazione tra progetto e portafoglio replicante sono i seguenti:

t	0	1	2	3
Progetto (C_t)	-20	40	-10	30
Portafoglio ($\bar{V}$)	$\bar{V}$	-40	10	-30
Combinazione	$-20 + \bar{V}$	0	0	0

Il termine $\bar{V}$ rappresenta il valore di mercato del portafoglio replicante in $t = 0$. Se $\bar{V} - 20 > 0$ (cioè $VAN > 0$), il progetto risulta più conveniente del portafoglio finanziario equivalente e genera un profitto certo al tempo iniziale: costituisce quindi un'opportunità di arbitraggio. Viceversa, se $\bar{V} - 20 < 0$ (cioè $VAN < 0$), il progetto determina una perdita certa e non deve essere accettato. ■

6.1.2 Progetti mutualmente esclusivi

Il **Valore Attuale Netto (VAN)** gode di una proprietà fondamentale, detta **proprietà di additività**, che consente di estendere la regola di selezione degli investimenti anche al caso in cui si debba individuare il progetto ottimale tra più alternative **mutualmente esclusive**.

Siano dati due progetti di investimento, A e B , definiti sul medesimo orizzonte temporale e caratterizzati dai flussi di cassa $\{C_0^A, C_1^A, \dots, C_m^A\}$ e $\{C_0^B, C_1^B, \dots, C_m^B\}$. Si ha:

$$\begin{aligned}
VAN(A) + VAN(B) &= \\
&C_0^A + \frac{C_1^A}{(1+i_1)} + \frac{C_2^A}{(1+i_2)^2} + \dots + \frac{C_m^A}{(1+i_m)^m} + \\
&C_0^B + \frac{C_1^B}{(1+i_1)} + \frac{C_2^B}{(1+i_2)^2} + \dots + \frac{C_m^B}{(1+i_m)^m} = \\
&(C_0^A + C_0^B) + \frac{C_1^A + C_1^B}{(1+i_1)} + \frac{C_2^A + C_2^B}{(1+i_2)^2} + \dots + \\
&\frac{C_m^A + C_m^B}{(1+i_m)^m} = VAN(A+B)
\end{aligned} \tag{6.2}$$

La proprietà di additività stabilisce che *la somma dei VAN di due progetti è uguale al VAN calcolato sulla somma dei rispettivi flussi di cassa*.

Questa caratteristica consente di affrontare il problema della scelta tra progetti **mutualmente esclusivi** — ossia progetti tra i quali può essere intrapresa una sola alternativa — utilizzando il medesimo criterio del VAN: tra più progetti definiti sullo stesso orizzonte temporale e con VAN positivi, il progetto economicamente più conveniente è quello con il **VAN più elevato**.

Quando si confrontano due o più progetti alternativi, l'adozione di uno implica la rinuncia ai flussi di cassa generati dagli altri. Per valutare correttamente la convenienza relativa, è quindi necessario considerare i **Flussi di Cassa Incrementali (FCI) – o Incremental Cash Flow (ICF)**.

I flussi di cassa incrementali rappresentano la variazione netta dei flussi di cassa dell'impresa che deriva dalla scelta di un progetto rispetto all'alternativa di riferimento. In altri termini:

$$FCI_t = C_t^{(A)} - C_t^{(B)},$$

dove $C_t^{(A)}$ e $C_t^{(B)}$ indicano i flussi di cassa dei due progetti al tempo t .

Essi misurano l'effetto addizionale dell'adozione del progetto A rispetto al progetto B , evidenziando solo le variazioni effettivamente attribuibili alla decisione di investimento.

Grazie alla proprietà di additività, il VAN calcolato sugli FCI coincide con la differenza tra i VAN dei due progetti:

$$VAN(FCI) = VAN(A) - VAN(B),$$

fornendo così un criterio coerente e univoco per la selezione tra progetti alternativi.

Esempio 6.2. Un'azienda deve scegliere tra tre progetti di investimento, i cui flussi di cassa (in migliaia di euro) sono riportati nella tabella seguente. Si assuma un tasso di attualizzazione pari al 10%.

t	0	1	2	$VAN(10\%)$
A	-7	11	12.1	13
B	-1	22	-12.1	9
C	-5	44	-24.2	15

Tabella 6.1: Flussi di cassa e valore attuale netto dei tre progetti.

Il progetto C presenta il **VAN più elevato** e, in virtù della proprietà di additività, può essere considerato il progetto più vantaggioso. Tuttavia, una valutazione più accurata richiede il confronto in termini di **flussi di cassa incrementali**, cioè delle differenze tra i flussi di ciascun progetto e quelli della migliore alternativa disponibile.

t	0	1	2	$VAN(10\%)$
A-C	-2	-33	36.3	-2
B-C	4	-22	12.1	-6
C-A	2	33	-36.3	2

Tabella 6.2: Flussi di cassa incrementali e relativo VAN tra progetti alternativi.

Dalla tabella 6.2 risulta che l'unico progetto con **VAN incrementale positivo** è il progetto C. Pertanto, scegliere il progetto con il VAN assoluto più elevato equivale a scegliere l'unico progetto che presenta un VAN positivo quando i flussi di cassa sono valutati in termini *incrementali* rispetto alla migliore alternativa disponibile.

6.1.3 Esistenza di vincoli di capitale

Il criterio del **Valore Attuale Netto (VAN)** può essere esteso al caso in cui l'impresa disponga di risorse finanziarie limitate. In presenza di vincoli di capitale, la scelta tra progetti alternativi non può basarsi esclusivamente

sul valore assoluto del VAN, poiché occorre considerare anche l'ammontare dell'investimento richiesto in rapporto alla ricchezza creata.

A tale scopo si introduce l'**Indice di Profittabilità (IP)** — o **Profitability Index (PI)** — che misura la capacità di un progetto di generare valore per unità di capitale investito.

Sia dato un progetto di investimento con flussi di cassa certi

$$\{C_0, C_1, \dots, C_m\}.$$

Indichiamo con

$$\tilde{V} = \frac{C_1}{(1+i_1)} + \frac{C_2}{(1+i_2)^2} + \dots + \frac{C_m}{(1+i_m)^m}$$

il valore attuale complessivo dei flussi futuri, escluso l'esborso iniziale. L'indice di profittabilità è definito come

$$IP = \frac{\tilde{V}}{-C_0}. \quad (6.3)$$

L'IP rappresenta quindi il rapporto tra il valore attuale delle poste future e il valore dell'investimento iniziale cambiato di segno. Esso indica quante unità monetarie di valore attuale vengono generate per ogni unità investita al tempo $t_0 = 0$.

In assenza di vincoli di capitale, la regola del VAN stabilisce che un progetto è conveniente se e solo se

$$VAN = C_0 + \tilde{V} > 0.$$

Poiché questa condizione equivale a richiedere che il valore attuale dei flussi futuri superi l'esborso iniziale, si ottiene:

$$IP = \begin{cases} \frac{\tilde{V}}{-C_0} > 1, & \text{se } C_0 < 0, \\ \frac{\tilde{V}}{-C_0} < 1, & \text{se } C_0 > 0. \end{cases}$$

L'indice di profittabilità fornisce dunque una misura *relativa* della convenienza economica di un progetto, in contrasto con il VAN che ne esprime la convenienza in termini assoluti.

Quando l'impresa dispone di capitale illimitato, la regola del VAN e quella dell'IP conducono alle stesse decisioni: entrambi selezionano

i progetti con $VAN > 0$. Tuttavia, in presenza di **vincoli di capitale** o di **progetti scalabili** (ossia progetti frazionabili o replicabili in misura proporzionale), l'indice di profittabilità risulta particolarmente utile.

In tali contesti, ordinare i progetti in base all' IP consente di individuare la combinazione che massimizza il valore totale creato dall'impresa, dato il capitale disponibile.

Esempio 6.3. Un'impresa dispone, al tempo $t_0 = 0$, di un capitale limitato pari a €10,000. Deve scegliere tra due progetti di investimento scalabili, i cui flussi di cassa (in migliaia di euro) e indicatori di performance sono riportati nella tabella seguente. Si assuma un tasso di attualizzazione pari al 10%.

t	0	1	2	$VAN(10\%)$	IP
B	-1	22	-12.1	9	10
C	-5	44	-24.2	15	4

Tabella 6.3: Flussi di cassa, VAN e indice di profittabilità per due progetti scalabili.

Il criterio del **VAN** porterebbe a preferire il progetto C , che presenta un valore attuale netto più elevato. Tuttavia, in presenza di un **vincolo di capitale** e di **progetti scalabili**, la decisione ottimale deve basarsi sull'**indice di profittabilità**.

Il progetto B presenta infatti un valore di $IP = 10$, superiore a quello del progetto C ($IP = 4$), indicando che per ogni unità di capitale investita genera un incremento di ricchezza maggiore.

Poiché i progetti sono scalabili, l'impresa può replicarli fino a esaurimento del capitale disponibile:

Capitale totale disponibile: €10,000.

Pertanto, può intraprendere:

- 10 progetti di tipo B , con un VAN complessivo di €90,000;
- 2 progetti di tipo C , con un VAN complessivo di €30,000.

L'apparente contraddizione tra VAN e IP è solo formale: il VAN valuta la convenienza *assoluta* di ciascun progetto, mentre l'IP misura la convenienza *relativa* per unità di capitale investito. In condizioni di vincolo finanziario, l'indice di profittabilità fornisce quindi un criterio di scelta coerente con la regola del VAN e consente di massimizzare la ricchezza complessiva dell'impresa. ■

6.2 Tasso Interno di Rendimento (TIR)

Dato un generico flusso finanziario

$$\{C_0, C_1, \dots, C_m\},$$

definito sullo scadenziario

$$\{t_0, t_1, \dots, t_m\},$$

in cui almeno un importo C_j ha segno opposto agli altri, si definisce **Tasso Interno di Rendimento (TIR)** — o **Internal Rate of Return (IRR)** — quel tasso i^* che rende nullo il valore attuale netto dell'operazione finanziaria. Formalmente, il TIR è la radice dell'equazione:

$$0 = C_0 + \frac{C_1}{(1+i^*)} + \frac{C_2}{(1+i^*)^2} + \dots + \frac{C_m}{(1+i^*)^m}. \quad (6.4)$$

In altri termini, i^* è il tasso al quale i flussi positivi e negativi del progetto si bilanciano in valore attuale. Dal punto di vista matematico, la determinazione del TIR equivale alla ricerca delle radici reali di un'equazione polinomiale di grado m , generalmente risolta per via numerica.

Nella pratica, il calcolo del TIR è automatizzato in numerosi software: in particolare, nei fogli di calcolo *Excel* le funzioni `TIR.COST()` e `TIR.X()` consentono di determinarlo rapidamente a partire dai flussi di cassa.

6.2.1 Interpretazione e criterio di scelta

Affinché il TIR possa essere utilizzato come criterio decisionale, è necessario confrontarlo con un tasso di riferimento r^* , noto come **tasso di sbarramento**, ovvero **costo opportunità del capitale** (o, nella terminologia anglosassone, *hurdle rate*). Il tasso r^* rappresenta il rendimento minimo richiesto affinché un progetto possa essere accettato.

- Se i flussi di cassa sono **certi**, il tasso di riferimento riflette semplicemente la struttura per scadenza dei tassi privi di rischio.
- Se i flussi di cassa sono **rischiosi**, r^* deve includere un **premio per il rischio** adeguato alla natura dell'investimento.

Nel seguito, considereremo inizialmente progetti **non rischiosi**, per concentrarci sui problemi strutturali del metodo del TIR. I risultati si estendono al caso rischioso, includendo opportunamente il premio per il rischio nel tasso r^* .

6.2.2 Dipendenza dalla struttura dei flussi di cassa

Il criterio basato sul TIR non è universale, poiché la regola di accettazione varia a seconda della forma dei flussi di cassa. Si distinguono due casi principali:

- Una struttura di flussi **posticipata** inizia con un flusso negativo (investimento iniziale) e genera successivamente flussi positivi fino alla scadenza. È il caso tipico degli *investimenti produttivi*, dell'acquisto di *obbligazioni* o della *concessione di prestiti*, in cui si sostiene oggi un esborso per ottenere rendimenti futuri. In tal caso, l'investimento è accettabile se:

$$\text{TIR} > r^*.$$

- Una struttura di flussi **anticipata** presenta invece flussi positivi iniziali seguiti da uscite di cassa nei periodi successivi. Esempi tipici sono i *mutui*, i *leasing* o le *operazioni di finanziamento*, in cui si riceve un capitale all'inizio e si effettuano poi rimborsi periodici. In questo caso, la regola si inverte:

$$\text{TIR} < r^*.$$

In sintesi, i flussi posticipati descrivono *impieghi di capitale* (investimenti), mentre i flussi anticipati rappresentano *fonti di capitale* (finanziamenti); la regola di decisione va quindi applicata in modo coerente alla direzione dei flussi.

L'esempio 6.4 illustra come la dipendenza del criterio dal profilo temporale dei flussi di cassa possa complicarne l'applicazione.

Esempio 6.4. Si consideri un progetto di investimento con la seguente struttura di flussi di cassa e tassi a pronti corrispondenti:

t	0	1	2	3
C_t	-9,000	4,000	5,000	3,000
$i(0, s)$		0.08	0.05	0.06

Il valore attuale netto, calcolato attualizzando i flussi mediante i tassi associati ai corrispondenti titoli zero coupon, è:

$$VAN = -9,000 + \frac{4,000}{1.08} + \frac{5,000}{1.05^2} + \frac{3,000}{1.06^3} = 1,758 > 0.$$

Poiché il valore attuale netto è positivo, il progetto deve essere **accettato** secondo la regola del VAN.

Il TIR si ottiene risolvendo:

$$0 = -9,000 + \frac{4,000}{1 + i^*} + \frac{5,000}{(1 + i^*)^2} + \frac{3,000}{(1 + i^*)^3},$$

da cui risulta:

$$i^* \simeq 16.6\%.$$

Poiché il progetto presenta una struttura di flussi **posticipata**, e il TIR risulta superiore ai tassi privi di rischio di pari scadenza, anche il criterio del TIR porta ad accettare l'investimento.

Cancellazione del progetto

Si ipotizzi che, dopo l'accettazione, il progetto sia rivalutato e si consideri la possibilità di annullarlo. La struttura dei flussi resta invariata per importi e scadenze, ma con segni opposti:

$$VAN = 9,000 - \frac{4,000}{1.08} - \frac{5,000}{1.05^2} - \frac{3,000}{1.06^3} = -1,758 < 0.$$

La struttura è ora **anticipata**. Il VAN negativo conferma che l'annullamento non è conveniente.

Il TIR, che dipende solo dai rapporti relativi tra i flussi, resta invariato ($i^* \simeq 16.6\%$), ma la regola di decisione si inverte: per flussi anticipati il

progetto è accettabile solo se $TIR < r^*$. Nel nostro caso, poiché $TIR > r^*$, anche secondo il criterio del TIR l'ipotesi di cancellazione deve essere **rigettata**.

L'esempio mostra come la direzione dei flussi di cassa determini la corretta interpretazione del TIR e la regola di accettazione da applicare.

6.2.3 Ambiguità e limiti del TIR

Oltre alla dipendenza dalla struttura dei flussi, il metodo del TIR presenta ulteriori criticità:

1. Se il flusso di cassa presenta più di un'inversione di segno, l'Eqn. (6.4) può ammettere più soluzioni reali, e dunque più valori di TIR (Esempio 6.5).
2. In alcuni casi, la struttura dei flussi di cassa può essere tale da non produrre alcuna soluzione reale (Esempio 6.6).

Infine, quando la **struttura per scadenza dei tassi non è piatta**, il confronto tra il TIR e un unico tasso di riferimento diventa ambiguo: la corretta valutazione dovrebbe confrontare ciascun flusso con il tasso coerente alla relativa scadenza (Esempio 6.6). Questo conferma che, pur essendo intuitivo e largamente utilizzato, il metodo del TIR deve essere applicato con cautela e sempre in parallelo al criterio del VAN, che resta più generale e coerente dal punto di vista teorico.

Esempio 6.5. Si consideri un progetto di investimento caratterizzato dai seguenti flussi di cassa (in euro):

t	0	1	2	3
C_t	-10,000	+41,000	-30,000	-1,000

La sequenza dei flussi di cassa mostra due inversioni di segno, e quindi l'equazione del valore attuale netto:

$$0 = -10,000 + \frac{41,000}{(1+i)^1} - \frac{30,000}{(1+i)^2} - \frac{1,000}{(1+i)^3}$$

ammette più di una soluzione reale.

In particolare, il progetto presenta due tassi interni di rendimento:

$$i_1^* = 0\%, \quad i_2^* = 213.19\%.$$

Quale dei due tassi dovrebbe essere utilizzato per la valutazione economica del progetto?

La presenza di più radici reali del polinomio evidenzia un limite strutturale del metodo del TIR: quando la sequenza dei flussi di cassa presenta più di una inversione di segno, il TIR perde la sua univocità e non rappresenta più un criterio affidabile per la decisione d'investimento. ■

Esempio 6.6. *Si analizzino due situazioni che mettono in luce i limiti applicativi del metodo del TIR.*

Assenza di soluzioni per l'equazione del TIR

t	0	1	2
C_t	10,000	-30,000	35,000

Per questo progetto, l'equazione del TIR

$$0 = 10,000 - \frac{30,000}{1+i} + \frac{35,000}{(1+i)^2}$$

non ammette soluzioni reali. Il valore attuale netto (VAN) risulta positivo per ogni tasso di sconto, ma ciò non implica necessariamente che l'assenza di un TIR equivalga a un progetto sempre profittevole. Se infatti si invertissero i segni dei flussi di cassa, si avrebbe un progetto con VAN sempre negativo e, anche in questo caso, privo di TIR. La mancata esistenza di una soluzione per il TIR, quindi, non fornisce alcuna indicazione sulla capacità del progetto di creare valore.

Ambiguità del TIR in presenza di struttura dei tassi non piatta

t	0	1	2	VAN	TIR
C_t	-80,000	40,000	50,000	602,79 > 0	7,92%
$i(0, s)$		0.06	0.08		

Secondo il criterio del VAN, il progetto deve essere accettato poiché genera un valore attuale netto positivo. Il TIR, invece, fornisce un'indicazione ambigua: essendo compreso tra i tassi spot $i(0, 1) = 6\%$ e $i(0, 2) = 8\%$,

$$6\% < 7.92\% < 8\%,$$

non è chiaro quale tasso di riferimento adottare per la valutazione.

Quando la struttura a termine dei tassi non è piatta, il confronto corretto deve essere effettuato con il **tasso di rendimento del portafoglio replicante**, cioè del portafoglio di ZCB che riproduce i flussi di cassa del progetto. Il prezzo di mercato del portafoglio replicante è:

$$P_0 = \frac{40,000}{1.06} + \frac{50,000}{1.08^2} = 80,602,79.$$

Determinando il tasso interno di rendimento di tale portafoglio si ottiene:

$$0 = -80,602,79 + \frac{40,000}{1 + i^*} + \frac{50,000}{(1 + i^*)^2}, \quad i^* = 7,39\%.$$

Poiché

$$\text{TIR del progetto (7.92\%)} > i^* (7.39\%),$$

il progetto risulta accettabile. ■

I due casi mostrano che il metodo del TIR può risultare:

- **non applicabile**, quando l'equazione non ammette soluzioni reali;
- **ambiguo**, quando la struttura dei tassi non è piatta e il confronto con un unico tasso di riferimento perde significato.

In tali situazioni, il criterio del VAN rimane l'unico metodo coerente e privo di ambiguità per valutare la convenienza economica di un investimento.

6.2.4 Progetti mutualmente esclusivi

Nel caso di progetti di investimento **mutualmente esclusivi**, si è visto che, secondo la regola del **VAN**, la scelta ottimale ricade sul progetto con il VAN più elevato, poiché esso rappresenta l'alternativa che genera il maggior incremento di valore per l'impresa.

Tale criterio, tuttavia, **non può essere esteso al TIR**. Quando si confrontano progetti mutualmente esclusivi, **il progetto con il TIR più alto non coincide necessariamente con quello economicamente preferibile**, ossia con quello che massimizza la creazione di valore.

Esempio 6.7. Si assuma una struttura dei tassi piatta, $i = 2\%$. Un'impresa deve selezionare uno fra i seguenti due progetti di investimento:

t	0	1	2	VAN(0.02)	TIR (%)
A	-10,000	-16,000	30,000	3,149	10.79
B	-10,000	11,000	11,000	2,534	15.36

Secondo la regola del **VAN**, il progetto **A** è preferibile, poiché genera un valore attuale netto maggiore. Tuttavia, il suo **TIR** è inferiore a quello del progetto **B**.

Come discusso in precedenza, quando si confrontano progetti *mutualmente esclusivi*, la valutazione corretta deve basarsi sui **flussi di cassa incrementali**, ossia sulla differenza tra i flussi del progetto considerato e quelli del progetto alternativo. Questo passaggio non è necessario per il VAN, poiché soddisfa la proprietà di additività, mentre il TIR non gode della stessa proprietà.

t	0	1	2	VAN(0.02)	TIR (%)
A-B	0	-18,000	19,000	615	5.56

I flussi di cassa incrementali presentano una sola inversione di segno, quindi esiste un unico TIR. Poiché il tasso interno di rendimento dei flussi differenziali (5.56%) è superiore al tasso di riferimento (2%), si conclude che il progetto **A** crea valore addizionale rispetto al progetto **B** ed è dunque l'investimento da preferire. ■

L'Esempio 6.7 evidenzia che, per applicare correttamente il criterio del TIR, è necessario analizzare i **flussi di cassa incrementali**, ossia le differenze tra i flussi dei progetti in confronto.

Quando tali flussi differenziali presentano una sola inversione di segno, l'equazione del TIR ammette un'unica soluzione, e la regola di accettazione può essere applicata senza ambiguità — distinguendo opportunamente tra strutture di flussi *anticipate* e *posticipate*.

Tuttavia, nel confronto tra un numero elevato di progetti, è frequente che i flussi di cassa incrementali mostrino più di una inversione di segno, generando così **molteplici TIR** e rendendo il criterio difficilmente interpretabile.

Esempio 6.8. Si consideri il caso in cui un'impresa debba selezionare uno fra i seguenti tre progetti di investimento:

t	0	1	2	VAN(0.02)	TIR (%)
A	-17,000	12,000	9,000	3,415	16.16
B	-16,800	10,000	11,000	3,577	15.98
C	-16,900	11,000	10,000	3,496	16.07

Secondo il criterio del **VAN**, il progetto **B** risulta preferibile, poiché genera il valore attuale netto più elevato. Per applicare correttamente il criterio del **TIR**, è necessario analizzare i **flussi di cassa incrementali** tra i progetti:

t	0	1	2	VAN(0.02)	TIR (%)
A-B	-200	2,000	-2,000	-162	12.7-787.3
A-C	-100	1,000	-1,000	-81	12.7-787.3
B-C	100	-1,000	1,000	81	12.7-787.3

I flussi di cassa incrementali presentano più di una inversione di segno e di conseguenza l'equazione del TIR ammette più soluzioni reali. In questi casi, il criterio del TIR diventa **ambiguo**, poiché i tassi calcolati non consentono di stabilire quale progetto crei effettivamente maggiore valore.

Al contrario, il criterio del **VAN** fornisce un'indicazione univoca: poiché l'unico flusso di cassa incrementale con VAN positivo è quello relativo alla differenza tra i progetti **B** e **C**, il progetto **B** rappresenta la scelta economicamente più vantaggiosa. ■

6.3 Il Tasso Annuale Effettivo Globale (TAEG)

Il **Tasso Annuo Effettivo Globale (TAEG)** è l'indicatore sintetico del **costo complessivo del credito al consumo**. Secondo la definizione riportata nel glossario della *Banca d'Italia*¹,

Il TAEG rappresenta lo strumento principale di trasparenza nei contratti di credito al consumo. È un indice armonizzato a livello comunitario che, nelle operazioni di credito al consumo, indica il costo totale del credito a carico del consumatore, comprensivo degli interessi e di tutti gli altri oneri connessi all'utilizzo del credito stesso. Il TAEG è espresso in percentuale del credito concesso e su base annua, e deve essere indicato nella documentazione contrattuale, nei messaggi pubblicitari e nelle offerte al pubblico.

In termini pratici, il TAEG (detto anche **ISC – Indicatore Sintetico di Costo**) consente di confrontare diverse offerte di finanziamento attraverso un unico parametro percentuale che incorpora tutti i costi sostenuti dal debitore per accedere al credito. Nel calcolo del TAEG rientrano:

- il **Tasso Annuo Nominale (TAN)**;
- gli **oneri accessori** applicati dall'intermediario, come spese di istruttoria, incasso rate, gestione pratica o eventuali polizze assicurative obbligatorie;
- le **spese fiscali**, ad esempio imposte di bollo o tributi dovuti;
- altri **oneri connessi all'erogazione del prestito**, come costi di gestione del conto corrente di appoggio, se previsto contrattualmente.

Il TAEG è espresso su base annua e tiene conto della durata complessiva del finanziamento e della periodicità delle rate.

¹ Banca d'Italia, *Glossario – TAEG (Tasso Annuo Effettivo Globale)*, disponibile al link: <https://www.bancaditalia.it/footer/glossario/index.html?letter=t>.

Esempio 6.9. Verificare che il TAEG indicato nella seguente proposta commerciale sia calcolato correttamente.

Una casa automobilistica propone l'acquisto di un modello di punta alle seguenti condizioni di finanziamento:

- prezzo chiavi in mano: € 9,746 (IVA, manutenzione e contributo all'acquisto inclusi; IPT esclusa);
- anticipo: € 2,500;
- importo totale del finanziamento: € 7,246;
- spese di istruttoria: € 300;
- imposta di bollo: € 16;
- 23 rate mensili da € 45 ciascuna;
- spese di incasso rata: € 3.50;
- maxi rata finale: € 7,130;
- TAN fisso: 6.40%;
- **TAEG dichiarato: 9.81%.**

Il TAEG è il tasso i^* che rende uguali, in valore attuale, l'importo finanziato e la somma dei pagamenti dovuti dal cliente:

$$7,246 = (300 + 16) + (45 + 3.50) a_{\overline{23}|i^*} + 7,130 (1 + i^*)^{-24}$$

dove:

$$a_{\overline{23}|i^*} = \frac{1 - (1 + i^*)^{-23}}{i^*}.$$

Il tasso $i^* = 0.00783$, ottenuto per via numerica, rappresenta il **tasso mensile effettivo globale**. Per ottenere il TAEG, cioè il tasso annuale equivalente in regime di capitalizzazione composta, si calcola:

$$TAEG = (1 + i^*)^{12} - 1 = (1 + 0.00783)^{12} - 1 = 9.81\%.$$

Il costo complessivo del finanziamento risulta dunque correttamente espresso dal TAEG dichiarato nella documentazione contrattuale. ■

6.4 Approfondimento

Il VAN in presenza di flussi di cassa rischiosi

La regola del VAN si basa sull'idea che il valore dei flussi di cassa futuri di un investimento debba coincidere con il prezzo di mercato di un **portafoglio replicante** capace di riprodurne la stessa struttura temporale. Per una corretta valutazione, i flussi di cassa devono essere scontati ai tassi relativi ad attività finanziarie di rischio equivalente.

Nel caso di investimenti privi di rischio, il portafoglio replicante può essere costruito con ZCB; i flussi vengono quindi scontati ai tassi *risk-free*, tenendo conto della struttura per scadenza. Per investimenti rischiosi, invece, i flussi futuri sono incerti e la formula del VAN diventa:

$$VAN_t = C_t + \sum_{s=t+1}^T \frac{E_t(C_s)}{(1 + i(t, s) + \lambda)^{s-t}}, \quad (6.5)$$

dove $E_t(C_s)$ è il valore atteso del flusso futuro, $i(t, s)$ il tasso *spot* privo di rischio e λ un appropriato **premio per il rischio**.

La valutazione richiede quindi:

1. la stima dei flussi di cassa attesi, come media ponderata dei flussi possibili negli scenari futuri;
2. la determinazione dei tassi di sconto adeguati.

Nella pratica, un portafoglio perfettamente replicante esiste solo in casi particolari: di norma i flussi differiscono parzialmente, generando un **tracking error**. Perché il VAN fornisca una valutazione coerente, il valore attuale di tale errore deve essere nullo.

A tale scopo si adotta il **Capital Asset Pricing Model (CAPM)**, secondo cui solo il **rischio sistematico** — quello che varia con il mercato — è remunerato, mentre il rischio idiosincratico può essere eliminato tramite diversificazione. Il tasso di sconto appropriato incorpora quindi un premio

proporzionale al rischio sistematico:

$$\lambda = \beta (E[R_m] - r_f),$$

dove β misura la sensibilità del progetto rispetto al mercato. In tal modo, la regola del VAN resta valida anche per gli investimenti rischiosi.

Esempio 6.10. *Determinare il valore di un progetto alberghiero in Italia che genererà, tra un anno, un flusso di cassa rischioso.*

L'investimento produce un solo flusso di cassa incerto al tempo $t = 1$, come indicato di seguito (valori in milioni di euro):

Stato	Prob.	C_1
Buono	0.4	12.3
Medio	0.4	12.3
Cattivo	0.2	9.3
$E(C_1)$		11.3

Il tasso privo di rischio a un anno è $r_f = 6\%$. Poiché il progetto è rischioso, il suo valore deve essere confrontato con quello di un portafoglio replicante formato da un titolo *risk-free* e da un portafoglio di mercato. Utilizzando come riferimento l'indice *FTSE MIB*, e assumendo che il coefficiente di rischio sistematico sia $\beta = 0.5$ e il rendimento atteso del mercato $E[R_m] = 20\%$, il rendimento atteso del portafoglio replicante sarà:

$$E[R_p] = r_f + \beta (E[R_m] - r_f) = 0.06 + 0.5 (0.20 - 0.06) = 0.13.$$

Il valore attuale del flusso di cassa atteso risulta quindi:

$$PV(C_1) = \frac{11.3}{1.13} = 10.0.$$

Poiché il portafoglio replicante ha valore 10 milioni, l'investimento crea valore per l'impresa se il costo iniziale è inferiore a tale importo ($C_0 < 10$ milioni). ■

Il ragionamento sviluppato finora consente di comprendere i limiti di alcuni metodi utilizzati per stimare il prezzo delle azioni di un'azienda. Si indichi con D_t il dividendo per azione distribuito al tempo t , con r_e il tasso

di rendimento richiesto dagli azionisti, e con V_t il valore del titolo azionario in t .

L'investitore che detiene il titolo può incassare il dividendo D_t e venderlo al prezzo V_t , oppure mantenerlo in portafoglio. Se l'azione è posseduta per due anni, il suo valore iniziale è dato dal valore attuale dei flussi di cassa attesi:

$$V_0 = \frac{D_1}{1 + r_e} + \frac{D_2 + V_2}{(1 + r_e)^2}.$$

In assenza di opportunità di arbitraggio, in ogni istante il prezzo deve essere uguale al valore attuale dei dividendi futuri:

$$V_t = \frac{D_{t+1} + V_{t+1}}{1 + r_e}.$$

Sostituendo ricorsivamente, si ottiene:

$$V_0 = \sum_{t=1}^T \frac{D_t}{(1 + r_e)^t},$$

dove T rappresenta la durata dell'impresa. Se si assume che l'azienda operi indefinitamente e che i dividendi crescano a un tasso costante $g < r_e$, il valore dell'azione è dato dal **Gordon Growth Model**:

$$V_0 = \frac{D_1}{r_e - g}. \quad (6.6)$$

Assumendo che i dividendi rappresentino una quota fissa b degli utili per azione (EPS_t), cioè $D_t = b EPS_t$, e che gli utili crescano anch'essi al tasso g , si ottiene:

$$V_0 = \frac{b EPS_0(1 + g)}{r_e - g} \quad \Rightarrow \quad \frac{V_0}{EPS_0} = \frac{b(1 + g)}{r_e - g}.$$

Il rapporto $\frac{V_0}{EPS_0}$, noto come **price-earnings ratio (P/E)**, è spesso utilizzato per stimare il valore di un'azienda. In pratica, si calcola il P/E medio di un gruppo di imprese comparabili e lo si moltiplica per l' EPS_0 dell'impresa da valutare. Tale metodo fornisce una stima valida solo se le ipotesi del modello — crescita costante, payout stabile e tasso di rendimento uniforme — risultano plausibili.

Economic Value Added (EVA)

Il metodo dell'**Economic Value Added (EVA)** è oggi uno degli strumenti più diffusi per valutare la capacità effettiva di un progetto di generare valore economico. In realtà, esso rappresenta una formulazione alternativa della regola del VAN, utile soprattutto per orientare i decisori verso scelte coerenti con la massimizzazione del valore.

Si indichi con I_t il valore contabile del capitale investito nel progetto al tempo t , al netto dell'ammortamento (in $t = 0$ pari al costo iniziale, in $t = T$ pari a zero). La variazione di capitale tra due periodi consecutivi è $I_{t-1} - I_t$, mentre rI_{t-1} rappresenta il costo opportunità del capitale impiegato. L'EVA nel periodo $(t-1, t]$ misura quindi la redditività economica netta del progetto:

$$EVA_t = C_t - (I_{t-1} - I_t) - rI_{t-1} = C_t + I_t - I_{t-1}(1 + r),$$

dove C_t è il flusso di cassa del periodo. Il valore attuale degli EVA successivi è dato da:

$$\overline{EVA} = \sum_{t=0}^T \frac{EVA_t}{(1 + r)^t}. \quad (6.7)$$

Sostituendo l'espressione di EVA_t e semplificando, si ottiene:

$$\overline{EVA} = C_0 + \frac{C_1 + I_1 - I_0(1 + r)}{1 + r} + \frac{C_2 + I_2 - I_1(1 + r)}{(1 + r)^2} + \dots = VAN.$$

Il valore attuale degli EVA coincide quindi con il **valore attuale netto** del progetto. Il metodo EVA fornisce dunque una misura alternativa ma equivalente del valore creato da un investimento.

Capitolo 7

Metodi per la misurazione della struttura dei tassi

7.1 Metodi grafici

La **struttura dei tassi di interesse** svolge un ruolo cruciale sia nell'analisi economica della congiuntura macroeconomica, sia nella gestione dei portafogli obbligazionari e nella valutazione di flussi finanziari complessi.

Nei mercati dei titoli a reddito fisso non esistono in genere zero coupon bond con scadenze superiori a un anno. Talvolta sono disponibili quotazioni degli **STRIPS**, titoli ottenuti separando le cedole dai coupon bearing bond. Tuttavia, tali strumenti presentano una liquidità limitata e non possono essere considerati veri ZCB.

In questo capitolo si illustrano alcuni metodi per **approssimare la struttura dei tassi a pronti** utilizzando i CBB quotati sul mercato.

Una prima e semplice approssimazione consiste nell'**ignorare l'effetto cedola** e nel considerare, per un intervallo temporale τ , il rendimento a scadenza del titolo come proxy del tasso a pronti corrispondente. In tal caso, la curva dei tassi può essere rappresentata nel piano (τ, y) , riportando per ciascun titolo osservato alla data di riferimento il valore $\tau = t_j - t$, con $j = 1, 2, \dots, m$.

Per ridurre la distorsione introdotta dalla presenza delle cedole, è possibile associare i rendimenti a scadenza alla **duration** del titolo, anziché alla maturity. La duration misura la vita media finanziaria del titolo, ponderata con il valore attuale dei flussi futuri, e riflette pertanto la distribuzione temporale dei pagamenti. Rappresentando i tassi in funzione

della duration, la curva dei rendimenti risulta **più corta ma più elevata**, poiché le duration sono sempre inferiori alle maturity.

La Figura 7.1 mostra la struttura dei rendimenti a scadenza dei principali titoli di Stato italiani (riportati nella Tabella 7.1) al 30/10/2025, rappresentata in funzione sia della maturity che della duration. Si osservi come la curva costruita sulla duration presenti una forma più compatta e livelli di rendimento leggermente superiori, a parità di orizzonte temporale effettivo.

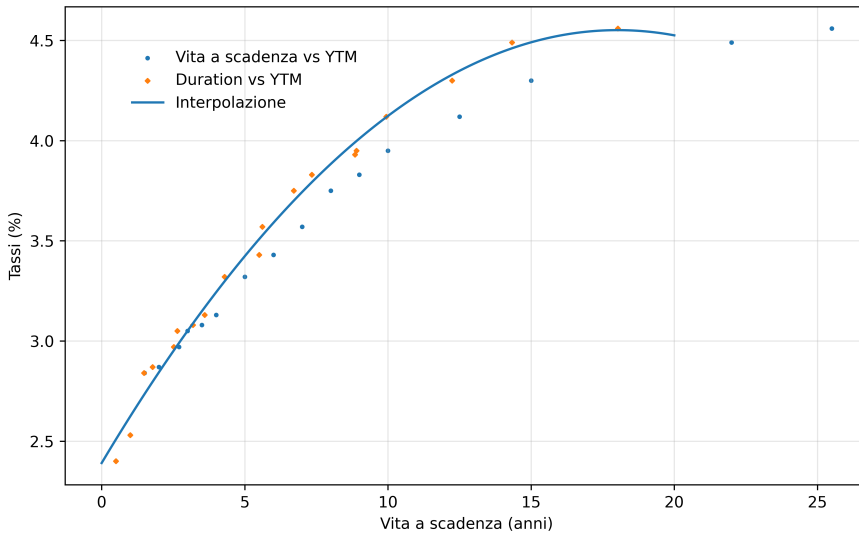


Figura 7.1: Rendimento a scadenza dei titoli di Stato italiani in relazione alla vita residua e alla duration.

In molti casi pratici è opportuno utilizzare una funzione interpolante che rappresenta la relazione tasso/duration. Tale funzione è data da:

$$\hat{y}(D) = \alpha + \beta D + \gamma D^2. \quad (7.1)$$

I parametri α , β , e γ si ottengono minimizzando la somma degli scarti dei quadrati fra il tasso osservato ed il tasso teorico dato dalla (7.1),

$$\min_{\alpha, \beta, \gamma} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [y(D_k) - \hat{y}(D_k)]^2. \quad (7.2)$$

Utilizzando il risolutore di Excel, i parametri che minimizzano la somma dei quadrati sono: $\alpha = -0.00665214$, $\beta = 0.23979187$ e $\gamma = 2.39075348$.

Descrizione	Prezzo	Cedola (%)	Scadenza	Rendimento a scadenza (%)	Duration modificata (anni)
Bot Zc Sep26 A Eur	0.98867	–	14/09/2026	2.305	0.47
Bot Zc Mar27 A Eur	0.97573	–	12/03/2027	2.530	0.95
Btp-Inv27 6,5%	1.05720	6.50	01/11/2027	2.840	1.42
Btp Tf 2,00% Fb28 Eur	0.98470	2.00	01/02/2028	2.870	1.78
Btp Fx 4.1% Feb29 Eur	1.02890	4.10	01/02/2029	3.050	2.64
Btp Tf 3,50% Mz30 Eur	1.01450	3.50	01/03/2030	3.130	3.60
Btp Tf 1,65% Mz32 Eur	0.90660	1.65	01/03/2032	3.430	5.50
Btp-1fb33 5,75%	1.13350	5.75	01/02/2033	3.570	5.61
Btp Tf 1,8% Mz41 Eur	0.73030	1.80	01/03/2041	4.300	12.24

Tabella 7.1: *Riepilogo dei principali titoli di Stato italiani: prezzi, rendimenti e duration modificata.*

Nella Figura 7.1 si può osservare la curva interpolante fino a 20 anni. È importante sottolineare che estrapolazioni per scadenze superiori ai dati a disposizione non sono da considerare attendibili.

7.2 Metodo bootstrap

Un altro metodo per la determinazione della struttura dei tassi è il cosiddetto **Bootstrap**. Tale metodo consiste nell'estrarre i tassi spot sequenzialmente da un insieme di prezzi di CBB. Come visto nel Capitolo 4, l'assenza di arbitraggio implica che il prezzo di un CBB sia uguale al prezzo di un portafoglio di ZCB —si veda la (4.3). Si indichino con $B(0, 1)$ e $B(0, 2)$, rispettivamente, i prezzi di uno ZCB ad un anno ed di uno ZCB a due anni. Inoltre si denoti con τ la discretizzazione scelta.

I tassi spot sono dati da:

$$i(0, 1) = \left[\frac{1}{B(0, 1)} \right] - 1;$$
$$i(0, 2) = \left[\frac{1}{B(0, 2)} \right]^{1/2} - 1.$$

(Si è posto $\tau = 1$. In generale, la discretizzazione può essere differente dalla base con cui è espresso il tasso. Per esempio, i tassi possono essere su base annuale e la discretizzazione semestrale, quindi $\tau = 0.5$).

Si ipotizzi che sul mercato sia quotato il titolo $\bar{B}(0,3)$ con scadenza tre anni e cedola annuale c_3 . Per la linearità del prezzo, deve essere:

$$\bar{B}(0,3) = c_3 [1 + i(0,1)]^{-1} + c_3 [1 + i(0,2)]^{-2} + (1 + c_3) [1 + i(0,3)]^{-3}. \quad (7.3)$$

I tassi a pronti $i(0,1)$ ed $i(0,2)$, ed il prezzo $\bar{B}(0,3)$ sono noti, pertanto l'unica incognita dell'Equazione (7.3) è il tasso spot $i(0,3)$, quindi:

$$i(0,3) = \left\{ \frac{1 + c_3}{\bar{B}(0,3) - c_3 \{ [1 + i(0,1)]^{-1} + [1 + i(0,2)]^{-2} \}} \right\}^{1/3} - 1. \quad (7.4)$$

Il tasso $i(0,4)$ si ottiene in maniera analoga. Se si indica con $\bar{B}(0,4)$ il prezzo di un CBB con scadenza in $k = 4$, estendendo di un periodo la (7.3) si ottiene:

$$\begin{aligned} \bar{B}(0,4) = c_4 [1 + i(0,1)]^{-1} + c_4 [1 + i(0,2)]^{-2} + \\ + c_4 [1 + i(0,3)]^{-3} + (1 + c_4) [1 + i(0,4)]^{-4}. \end{aligned}$$

da cui:

$$i(0,4) = \left\{ \frac{1 + c_4}{\bar{B}(0,4) - c_4 \{ [1 + i(0,1)]^{-1} + [1 + i(0,2)]^{-2} + [1 + i(0,3)]^{-3} \}} \right\}^{1/4} - 1.$$

In generale, la formula per l'estrazione del k -esimo tasso spot con discretizzazione τ è data da:

$$i(0, k\tau) = \left\{ \frac{1 + c_k}{\bar{B}(0, k\tau) - c_k \sum_{j=1}^{k-1} \{ [1 + i(0, j\tau)]^{-j\tau} \}} \right\}^{1/k\tau} - 1. \quad (7.5)$$

Esempio 7.1. *Determinare la struttura a pronti con passo di discretizzazione $\tau = 0.5$ anni (sei mesi) utilizzando il metodo del bootstrap.*

La Tabella 7.2 riporta i prezzi osservati a fine giornata sul mercato dei titoli di Stato italiani (dati ipotetici).

k	$k\tau$ (anni)	$\bar{B}(0, k\tau)$	c_k
1	0.5	0.98867	0
2	1.0	0.97573	0
3	1.5	1.05720	0.065
4	2.0	0.98470	0.02

Tabella 7.2: *Prezzi dei titoli di Stato italiani.*

I primi due titoli ($k = 1, 2$) sono ZCB. I corrispondenti tassi spot su base annua si ottengono direttamente:

$$i(0, 0.5) = \left(\frac{1}{0.98867} \right)^{1/0.5} - 1 = 0.02305, \quad i(0, 1) = \left(\frac{1}{0.97573} \right) - 1 = 0.02487.$$

Per la scadenza $k\tau = 1.5$, il titolo selezionato ha cedola annuale $c_3 = 0.065$ e prezzo $\bar{B}(0, 1.5) = 1.0572$. Applicando la formula di valutazione:

$$i(0, 1.5) = \left\{ \frac{1 + 0.065/2}{1.05720 - \frac{0.065}{2} \left[\frac{1}{(1+0.02305)^{0.5}} + \frac{1}{(1+0.02487)^1} \right]} \right\}^{1/1.5} - 1.$$

Determinati $i(0, 1.5) = 0.02610$ e $B(0, 1.5) = (1 + 0.02610)^{1.5} = 0.96209$, è possibile calcolare $i(0, 2)$ a partire dal prezzo $\bar{B}(0, 2) = 0.98470$. È utile, a fini pratici, sommare progressivamente i valori scontati dei flussi noti:

$$\sum_{j=1}^3 B(0, kj) = 0.98867 + 0.97573 + 0.96209 = 2.92649.$$

Da cui:

$$i(0, 2) = \left\{ \frac{1 + 0.02/2}{0.98470 - \frac{0.02}{2} \times 2.92649} \right\}^{1/2} - 1 = 0.02816.$$

Il tasso spot a due anni risulta quindi pari al 2.816%.

7.3 Strategie di speculazione sulla struttura a termine

Le strutture dei tassi d'interesse possono assumere varie forme, generate da molteplici fattori economici e dalle aspettative degli operatori di mercato. Diverse teorie economiche tentano di spiegare le cause e le dinamiche che determinano la **curva dei rendimenti** (*yield curve*), ma la loro trattazione esula dagli obiettivi del presente corso.

Nell'Esempio 7.1 la struttura ottenuta è **crescente**, ossia i tassi a breve scadenza risultano inferiori rispetto a quelli a lungo termine. In altri casi, tuttavia, si possono osservare strutture **decrescenti**, **piatte** (*flat*) oppure **unimodali** (*humped*), caratterizzate da tassi a medio termine più elevati di quelli a breve e a lungo termine.

A seconda della forma della curva dei rendimenti è possibile implementare specifiche **strategie di gestione** o di **quasi arbitraggio** (*arbitrage-like*). Una delle più note, utilizzata dai gestori di tesoreria, è la strategia del **riding-the-yield-curve** ("cavalcare la curva dei rendimenti"). Essa può essere adottata quando la curva è crescente e si fonda sull'ipotesi che la struttura dei tassi sia **price-preserving**, ossia che i prezzi e la forma della curva osservati oggi rimangano sostanzialmente invariati durante l'orizzonte temporale della speculazione.

7.3.1 Teorema dei prezzi certi

Si ipotizzi che la struttura dei tassi d'interesse evolva in modo **deterministico** nell'intervallo $[t, t']$. Ciò significa che, in t , è possibile conoscere con certezza i prezzi dei titoli che saranno osservati in t' . In tale contesto, l'unica evoluzione coerente con l'assenza di opportunità di arbitraggio è data da:

$$\bar{B}(t', t_m) = \frac{1}{B(t, t')} \bar{B}(t, t_m), \quad t \leq t' \leq t_m. \quad (7.6)$$

In altri termini, il prezzo certo in t' di un titolo con scadenza t_m deve essere pari al prezzo in t dello stesso titolo, capitalizzato al tempo t' mediante il fattore montante $1/B(t, t')$. Questa relazione assicura la coerenza temporale dei prezzi ed evita arbitraggi di tipo deterministico.

La dimostrazione procede per assurdo, supponendo che valga la disuguaglianza:

$$\bar{B}(t, t_m) > \bar{B}(t', t_m) B(t, t'). \quad (7.7)$$

In tal caso, si può implementare la seguente strategia di arbitraggio:

1. vendere allo scoperto in t , un CBB con scadenza t_m al prezzo $\bar{B}(t, t_m)$;
2. acquistare in t , $\bar{B}(t', t_m)$ unità di ZCB con scadenza t' ;
3. acquistare in t' , un CBB con scadenza t_m , al prezzo $\bar{B}(t', t_m)$.

t	t'	$t_j \ (j = 1, \dots, m-1)$	t_m
$\bar{B}(t, t_m)$	0	$-c_j$	$-(1 + c_m)$
$-\bar{B}(t', t_m)B(t, t')$	$\bar{B}(t', t_m)$	0	0
0	$-\bar{B}(t', t_m)$	c_j	$(1 + c_m)$
$\bar{B}(t, t_m) - \bar{B}(t', t_m)B(t, t') > 0$	0	0	0

Tabella 7.3: *Flussi generati dalla strategia di arbitraggio nel caso $\bar{B}(t, t_m) > \bar{B}(t', t_m)B(t, t')$.*

Lo schema dei flussi della Tabella 7.3 mostra che la strategia genera un **arbitraggio di tipo B**, poiché in t si ottiene un guadagno certo senza alcuna esposizione al rischio nei periodi successivi.

Se $\bar{B}(t, t_m)$ rappresenta il prezzo in t di uno ZCB con scadenza s , ossia $B(t, s)$, allora la relazione (7.6) si può riscrivere come:

$$B(t', s) = \frac{B(t, s)}{B(t, t')}.$$

Ricordando che $B(t, t', s) = B(t, s)/B(t, t')$, si deduce che, in condizione di certezza,

$$B(t', s) = B(t, t', s).$$

Ne consegue che un'evoluzione **price-preserving** della struttura, nella quale si assume che $B(t + \tau, t + 2\tau) = B(t, t + \tau)$, rende possibile la costruzione di strategie d'arbitraggio prive di rischio. L'Esempio 7.2 illustra concretamente questo risultato.

Esempio 7.2. Verificare l'effetto di una struttura dei tassi di interesse di tipo **price-preserving** implementando la strategia di quasi-arbitraggio *riding-the-yield-curve*.

I tassi correnti a 3 e 6 mesi sono rispettivamente $i(0, 0.25) = 3.8\%$ e $i(0, 0.5) = 4\%$. I prezzi corrispondenti dei titoli zero-coupon sono:

$$B(0, 0.25) = 0.990719, \quad B(0, 0.5) = 0.980581.$$

Nell'ipotesi di **evoluzione deterministica** della struttura dei tassi, il prezzo a tre mesi di un titolo con scadenza in ulteriori tre mesi deve coincidere con il prezzo a termine osservato oggi:

$$B(0.25, 0.5) = B(0, 0.25, 0.5) = 0.989766.$$

Se invece la struttura è **price-preserving**, sarà

$$B(0.25, 0.5) = B(0, 0.25) = 0.990719.$$

Si supponga di acquistare €100,000 di valore nominale di un BOT a 6 mesi, per un prezzo pari a:

$$P_0 = 100,000 \times B(0, 0.5) = €98,058.07.$$

Dopo tre mesi, il titolo avrà una vita residua di altri tre mesi. Se l'ipotesi **price-preserving** si verifica, il titolo potrà essere rivenduto a:

$$P_{0.25} = 100,000 \times B(0.25, 0.5) = €99,071.94.$$

Il rendimento annualizzato dell'operazione è dunque:

$$r = \frac{99,071.94 - 98,058.07}{98,058.07} \times \frac{12}{3} = 0.042004 = 4.2\%.$$

Questo rendimento supera di circa 40 punti base quello offerto dal BOT a 3 mesi.

L'arbitraggio diventa più evidente se si considera la seguente strategia:

- (a) prendere a prestito, per tre mesi, la somma necessaria ad acquistare €100,000 di BOT a 6 mesi (tasso a breve = 3.8%);

(b) dopo tre mesi, rimborsare il prestito e vendere il BOT come titolo con vita residua pari a 3 mesi.

Il payoff della strategia è mostrato nella Tabella 7.4.

$t = 0$	$t = 0.25$
+98,058.07	$-98,058.07(1 + 0.038)^{0.25} = -98,976.63$
-98,058.07	+99,071.94
0	+95.31

Tabella 7.4: *Flussi della strategia riding-the-yield-curve sotto un'ipotesi di struttura dei tassi price-preserving.*

La strategia garantisce un rendimento certo (**lock-in**) se, e solo se, la struttura dei tassi rimane invariata. Se invece la curva dei rendimenti si sposta verso l'alto (cioè i prezzi diminuiscono), il guadagno previsto può ridursi o annullarsi.

Infatti, se dopo tre mesi il tasso a breve salisse fino al 4.2%, il prezzo del titolo a 3 mesi diventerebbe:

$$B(0.25, 0.5) = 0.989766,$$

e il profitto si azzererebbe.

Per variazioni ulteriori dei tassi, la strategia genererebbe una perdita. Il prezzo $B(0.25, 0.5)$ rappresenta quindi il **punto di pareggio** (*break-even*) della strategia, coincidente con il prezzo forward deterministico $B(0, 0.25, 0.5)$. ■

L'esempio appena esaminato conferma che la proprietà di **scindibilità** può verificarsi nei mercati solo nel caso — altamente improbabile — in cui l'evoluzione della struttura dei tassi sia **deterministica**, e quindi risulti $B(T, s) = B(t, T, s)$.

Nella Tabella 7.5 sono riportati i prezzi e i coupon dei titoli utilizzati per costruire, mediante il metodo del *bootstrap*, la struttura dei tassi. Si invita il lettore a ricavare i tassi a pronti su base annuale e a verificarne la coerenza con i valori indicati nella colonna “Tassi spot”.

I tassi spot relativi a scadenze in cui non sono presenti titoli nel mercato sono stati stimati tramite interpolazione lineare.

Nella penultima e nell'ultima colonna sono riportati, rispettivamente, i prezzi e i tassi forward con consegna in $T = 0.5$ anni.

Nel caso di evoluzione deterministica della struttura tra $t = 0$ e $t + \tau = 0.5$, il teorema dei prezzi certi impone che

$$B(t + \tau, s) = B(t, t + \tau, s),$$

ovvero la struttura spot in $t + \tau = 0.5$ deve coincidere con i tassi forward osservati oggi ($t = 0$) per consegna nello stesso istante.

Scadenza	Prezzi	Coupon (%)	Tassi spot (%)	Prezzi spot	Prezzi forward ($t + \tau = 0.5$)	Tassi forward (%) ($t + \tau = 0.5$)
0.25	0.9954	—	1.869	0.9954	—	—
0.50	0.9887	—	2.305	0.9887	0.9869	2.669
1.0	0.9757	—	2.487	0.9757	0.9731	2.762
1.5	1.0572	6.500	2.610	0.9621	0.9568	2.986
2.0	0.9847	2.000	2.815	0.9460	0.9395	3.168
2.5	0.9961	2.800	2.994	0.9289	0.9222	3.291
3.0	1.0289	4.100	3.126	0.9118	0.9107	3.166
3.5	1.0740	5.250	3.043	0.9004	0.8934	3.272
4.0	1.0145	3.500	3.150	0.8833	0.8768	3.340
4.5	0.0000	—	3.225	0.8669	0.8593	3.426
5.0	1.1260	6.000	3.313	0.8496	0.8427	3.482
5.5	0.0000	—	3.375	0.8331	0.8263	3.529
6.0	0.9066	1.650	3.426	0.8170	0.8088	3.600
6.5	0.0000	—	3.500	0.7996	0.7848	3.799
7.0	1.1335	5.750	3.691	0.7759	0.7702	3.800
7.5	0.0000	—	3.700	0.7615	0.7514	3.883
8.0	1.0915	5.000	3.784	0.7429	0.7307	4.000
8.5	0.0000	—	3.900	0.7224	0.7163	4.002
9.0	1.0157	4.000	3.907	0.7082	0.6911	4.190
9.5	0.7997	1.450	4.090	0.6833	0.6775	4.183
10.0	0.8580	2.250	4.088	0.6698	—	—

Tabella 7.5: *Evoluzione deterministica della struttura dei tassi: confronto tra la curva dei tassi a pronti e la curva forward a $t + \tau = 0.5$ anni.*

La Figura 7.2 mostra la struttura dei tassi a pronti e la sua evoluzione deterministica a $t + \tau = 0.5$ anni. La traslazione verso l'alto della curva dei rendimenti, in assenza di shock aleatori, evidenzia come anche un'evoluzione deterministica possa modificare la struttura dei tassi.

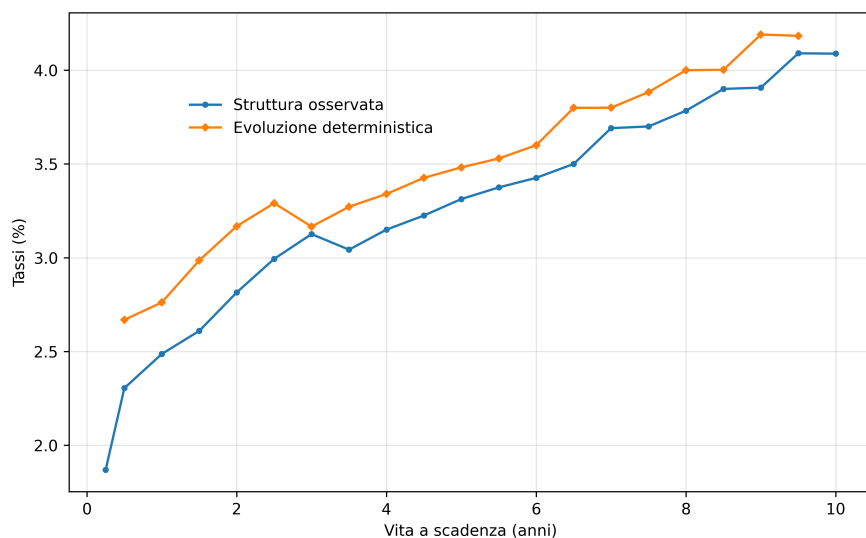


Figura 7.2: *struttura dei tassi a pronti e la sua evoluzione deterministica in $t + \tau = 0.5$ anni.*

Esempio 7.3. *Determinare il prezzo e la duration di un BTP triennale a cedola annuale del 4.1% e di un ZCB a 12 mesi, utilizzando la struttura dei tassi della Tabella 7.5. Calcolare inoltre i prezzi e le duration dei due titoli dopo $\tau = 0.5$ anni, ipotizzando un'evoluzione deterministica della struttura.*

Il prezzo del BTP risulta:

$$\bar{B}(0, 3) = 1.0289,$$

mentre per lo ZCB si ha:

$$B(0, 1) = 0.97573.$$

La duration del BTP è pari a:

$$D(0, \bar{V}_1) = 2.855 \text{ anni},$$

mentre, per lo ZCB la sua duration coincide con la maturity:

$$D(0, V_2) = 1 \text{ anno.}$$

Dopo 0.5 anni, il BTP avrà una vita residua pari a $m = 2.5$ anni, mentre per lo ZCB si riduce a $m = 0.5$ anni (6 mesi). Se si assume che in $t = 0.5$ la cedola non sia ancora stata corrisposta, il flusso finanziario del BTP è:

$$\bar{B}_1 = \{0.0205, 0.0205, 0.0205, 0.0205, 0.0205, 1.0205\},$$

con uno scadenziario ridotto di 0.5 anni.

Sotto l'ipotesi di evoluzione deterministica, i nuovi prezzi risultano:

$$\bar{B}(0.5, 3) = 1.0407, \quad B(0.5, 1.0) = 0.98691.$$

La duration dello ZCB, ridottasi di 0.5 anni, diventa:

$$D(0.5, V_2) = 0.5 \text{ anni,}$$

mentre per il BTP, calcolata sulla nuova struttura, è:

$$D(0.5, \bar{V}_1) = 2.355.$$

Si osservi che, nel caso di un titolo zero-coupon, vale la relazione

$$D(0.5, V_2) = D(0, V_2) - 0.5,$$

ossia la duration si riduce esattamente del tempo trascorso. Per i titoli con cedola, invece, tale proprietà non è in generale verificata: la duration non decresce semplicemente del tempo trascorso, salvo il caso di evoluzioni deterministiche della struttura dei tassi, come in questo caso.

Infine, per i prezzi si verifica che:

$$\bar{B}(0.5, 3) = \frac{\bar{B}(0, 3)}{B(0, 0.5)} = \frac{1.0289}{0.98867} = 1.0407,$$

$$B(0.5, 1) = \frac{B(0, 1)}{B(0, 0.5)} = \frac{0.97573}{0.98867} = 0.98691.$$

Capitolo 8

Strategie di hedging

8.1 Definizione di hedging

Una strategia di **copertura** (*hedging*) ha l'obiettivo di ridurre le perdite potenziali derivanti da movimenti sfavorevoli dei prezzi di mercato. Tale obiettivo viene perseguito assumendo posizioni opposte su attività finanziarie —acquistandole o vendendole, anche allo scoperto— in modo da compensare (*offset*) le variazioni di valore delle posizioni già detenute.

Si parla di **copertura perfetta** (*perfect hedging*) quando è possibile eliminare completamente il rischio connesso a un investimento, garantendo che qualsiasi variazione di prezzo sia neutralizzata da un effetto opposto della posizione di copertura.

Una tipica applicazione dell'hedging riguarda l'utilizzo dei contratti **FRA** per proteggersi da variazioni future dei tassi d'interesse. Ad esempio, un investitore che prevede di indebitarsi o investire a una certa data futura può bloccare fin d'ora il tasso effettivo, riducendo così l'incertezza sul costo o sul rendimento dell'operazione.

Nel caso di strategie speculative sulla forma della curva dei rendimenti (*riding-the-yield-curve*), si è visto che sia una perturbazione aleatoria, sia una semplice evoluzione deterministica della struttura dei tassi può generare perdite in conto capitale. Nell'Esempio 7.2, tali perdite potrebbero essere evitate attuando una copertura mediante l'acquisto di un $FRA_{3 \times 6}$ al tasso del 3.8%.

In questo modo, se il tasso a tre mesi, fra tre mesi, risultasse superiore al 3.8%, il contratto FRA genererebbe un incasso che compenserebbe la

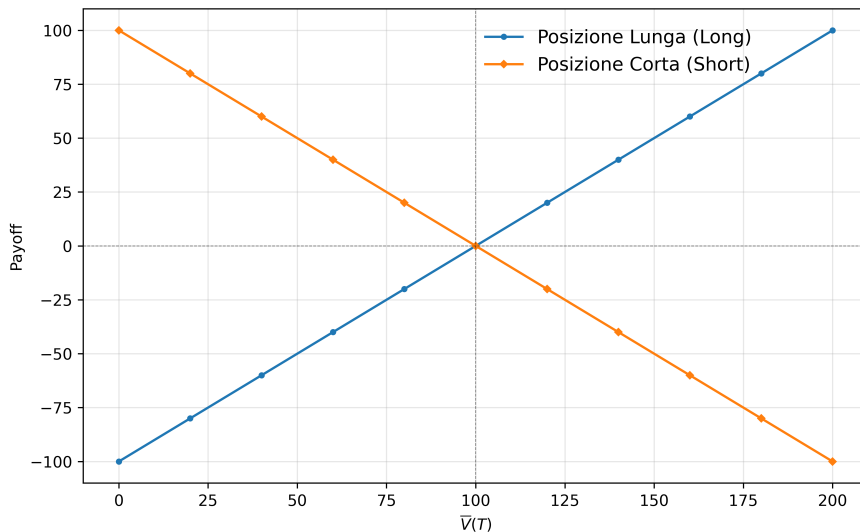


Figura 8.1: Payoff in T di una posizione lunga e di una posizione corta. Il prezzo iniziale del titolo è $\bar{V}(t) = 100$, mentre il payoff è dato dalla variazione di prezzo $\bar{V}(T) - \bar{V}(t)$.

perdita derivante dalla vendita del BOT a sei mesi a un prezzo inferiore al previsto. Viceversa, se il tasso risultasse inferiore, si dovrebbe sostenere un esborso, ma tale costo verrebbe compensato dal maggior guadagno ottenuto grazie alla vendita del BOT a un prezzo superiore a 0.990719. In entrambi i casi, il profitto atteso dalla strategia rimarrebbe protetto.

Occorre tuttavia osservare che l'utilizzo dei FRA come strumenti di copertura presenta limiti operativi: essi sono infatti tipici del mercato monetario e si riferiscono a scadenze generalmente non superiori a un anno.

8.2 Posizioni lunghe e corte

Una **posizione lunga** (*long position*) si realizza quando un investitore acquista o detiene un'attività finanziaria nella prospettiva di trarre profitto da un aumento del suo valore di mercato. In tal caso, variazioni positive del prezzo del titolo generano **guadagni in conto capitale**, mentre riduzioni di prezzo determinano perdite. Le strategie di copertura (*hedging*) associate a

posizioni lunghe hanno quindi l'obiettivo di limitare le perdite derivanti da movimenti avversi dei prezzi degli **asset** detenuti in portafoglio.

Viceversa, una **posizione corta** (*short position*) consente di ottenere profitti in presenza di una diminuzione del prezzo di mercato di un titolo. Essa si origina dal prestito di un titolo posseduto da un altro operatore, che viene immediatamente venduto sul mercato al prezzo corrente. Alla scadenza del periodo di prestito, l'investitore riacquista il titolo al nuovo prezzo di mercato per restituirlo al creditore. Il guadagno (o la perdita) è determinato dalla differenza tra il prezzo di vendita iniziale e il prezzo di riacquisto finale. Ad esempio, se un titolo viene venduto allo scoperto a €100 e successivamente riacquistato a €90, l'operatore realizza un profitto di €10.

Nel caso di strumenti obbligazionari, qualora durante il periodo di prestito vengano pagate cedole, queste devono essere corrisposte al proprietario originario, che rimane il beneficiario effettivo dei redditi generati dal titolo. La posizione corta rappresenta dunque, da un punto di vista finanziario, una **passività** (*liability*) nei confronti del prestatore del titolo.

Formalmente, il **payoff** di una posizione lunga o corta su un'attività con valore $V(t)$ al tempo t e $V(T)$ alla scadenza T è dato da:

$$\mathcal{P}_{\text{long}} = V(T) - V(t), \quad \mathcal{P}_{\text{short}} = -[V(T) - V(t)].$$

Ne segue che le due posizioni sono perfettamente simmetriche: un guadagno per l'una corrisponde a una perdita di pari entità per l'altra.

Nella Figura 8.1 sono illustrati i payoff di una posizione lunga e di una posizione corta. I grafici mettono in evidenza la relazione lineare tra prezzo e payoff e la perfetta simmetria tra le due configurazioni: un incremento del prezzo genera un guadagno per la posizione lunga e una perdita equivalente per la posizione corta, e viceversa.

Portafogli composti da **posizioni lunghe** e **posizioni corte** consentono di gestire il **rischio di tasso d'interesse**, ossia il rischio derivante dalle fluttuazioni dei prezzi dei titoli obbligazionari.

Si consideri, ad esempio, il caso di un gestore di un fondo obbligazionario che preveda un rialzo dei tassi d'interesse nel mese successivo. Come noto, uno *shift* positivo della struttura dei tassi comporta

una diminuzione del valore dei titoli a reddito fisso e, di conseguenza, perdite sulle posizioni lunghe detenute in portafoglio.

Per mitigare tale rischio, il gestore può ricorrere a due strategie alternative:

- (i) vendere il titolo e riacquistarlo successivamente, una volta che i prezzi si siano adeguati al nuovo livello dei tassi;
- (ii) vendere allo scoperto un titolo con caratteristiche analoghe, così da compensare le variazioni di prezzo della posizione lunga.

L'aumento dei tassi ridurrà il valore della posizione lunga, ma genererà un guadagno sulla posizione corta. Nel caso di **copertura perfetta** (*perfect hedge*), le due variazioni di valore risultano perfettamente compensate, eliminando il rischio di perdita. In pratica, si tratta di un equilibrio solo approssimato: differenze nelle caratteristiche dei titoli o nei movimenti della struttura dei tassi generano inevitabili discrepanze, riducendo l'efficacia della copertura.

8.3 Dedication

Un esempio di **hedge perfetto** è rappresentato dalla cosiddetta **cash flow creation** o **dedication**. Dato un flusso di passività future

$$\bar{L} = \{L_1, L_2, \dots, L_h\}$$

con scadenziario

$$\bar{t} = \{t_1, t_2, \dots, t_h\},$$

la strategia consiste nel costruire un portafoglio di titoli a reddito fisso tale che i flussi cedolari e di rimborso degli **asset** coincidano esattamente con i flussi delle **liability**. In questo caso, la copertura è completa: qualsiasi variazione della struttura dei tassi non altera la capacità del portafoglio di soddisfare gli esborsi futuri, poiché le scadenze e gli importi delle attività coincidono perfettamente con quelli delle passività.

Esempio 8.1. *Determinare la composizione di un portafoglio obbligazionario in grado di replicare un flusso prefissato di passività.*

Un gestore di fondi pensione deve garantire il seguente flusso di esborsi annuali, espresso in migliaia di euro:

$$\bar{L} = \{140, 100, 300, 400\},$$

con scadenze corrispondenti a

$$\bar{t} = \{1, 2, 3, 4\} \text{ anni.}$$

Il 26 settembre 2025, il gestore decide di costruire un portafoglio di titoli di stato in grado di replicare le suddette passività future. I titoli selezionati sono riportati nella tabella seguente:

k	$\bar{B}(0, k)$	c_k
1	1.0986	0.12
2	1.0973	0.085
3	1.1586	0.095
4	1.0415	0.0525

Il titolo con scadenza quattro anni garantisce €1.0525 per ogni euro di valore facciale. Per coprire la liability di €400,000 in $t_4 = 4$, occorre quindi acquistare:

$$\begin{aligned} X_4 \times 1.0525 &= €400,000 \Rightarrow \\ X_4 &= \frac{€400,000}{1.0525} = €380,047.51. \end{aligned}$$

In $t_3 = 3$, parte della liability può essere coperta utilizzando la cedola generata dal titolo con scadenza quattro anni. Pertanto:

$$\begin{aligned} X_3 \times 1.095 + €380,047.51 \times 0.0525 &= €300,000 \Rightarrow \\ X_3 &= \frac{€300,000 - €380,047.51 \times 0.0525}{1.095} = €255,751.14. \end{aligned}$$

Acquistando dunque €255,751.14 di valore facciale del BTP con scadenza triennale, e utilizzando la cedola del titolo a quattro anni, si copre integralmente la liability in $t_3 = 3$. Procedendo a ritroso, si determinano analogamente i valori facciali dei titoli con scadenza in

$t_2 = 2$ e $t_1 = 1$, tali da garantire la perfetta corrispondenza con il flusso delle passività future.

Formalmente, il problema di **dedication** si traduce nella risoluzione del seguente sistema lineare:

$$1.12X_1 + 0.085X_2 + 0.095X_3 + 0.0525X_4 = \text{€}140,000,$$

$$1.085X_2 + 0.095X_3 + 0.0525X_4 = \text{€}100,000,$$

$$1.095X_3 + 0.0525X_4 = \text{€}300,000,$$

$$1.0525X_4 = \text{€}400,000,$$

da cui si ricavano i valori facciali ottimali:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 81,592.45 \\ 51,383.54 \\ 255,751.14 \\ 380,047.50 \end{bmatrix}.$$

Il costo complessivo del portafoglio è dato dal suo valore di mercato:

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}(0) &= \text{€}81,592.45 \times 1.0986 + \text{€}51,383.54 \times 1.0973 + \text{€}255,751.14 \times 1.1586 \\ &\quad + \text{€}380,047.50 \times 1.0415 = \text{€}838,153.39. \end{aligned}$$

Poiché i prezzi indicati sono al corso secco, l'esborso effettivo risulterà leggermente superiore, in quanto occorre considerare anche il rateo d'interesse maturato. ■

Il portafoglio costruito è un esempio di **hedging perfetto**: qualunque variazione della struttura dei tassi a pronti non modifica l'obiettivo del gestore, ovvero la capacità di coprire integralmente le **liability** mediante i flussi generati dal portafoglio di **asset** selezionato.

Tuttavia, la possibilità di realizzare un portafoglio di questo tipo è piuttosto limitata. Le principali difficoltà sono riconducibili a due fattori:

- (i) per alcune scadenze non esistono sul mercato titoli in grado di replicare esattamente le liability corrispondenti. In tal caso è possibile utilizzare titoli con scadenze prossime, ma ciò espone il portafoglio a rischi residui dovuti alle fluttuazioni aleatorie della struttura dei tassi;
- (ii) il costo del portafoglio può risultare eccessivo rispetto al capitale disponibile. Nel nostro esempio, per generare i flussi richiesti sarebbe

necessario un esborso iniziale prossimo al milione di euro.

8.4 Hedging utilizzando la duration

Le strategie di **hedging** basate sulla **duration** rappresentano un approccio operativo ampiamente utilizzato nella gestione del rischio di tasso d'interesse. Quando un portafoglio obbligazionario è esposto a variazioni dei tassi, il suo valore di mercato tende a muoversi in direzione opposta rispetto ai tassi stessi: un aumento dei rendimenti determina una riduzione dei prezzi, mentre una loro diminuzione genera guadagni in conto capitale. L'obiettivo dell'hedging mediante duration è quello di mitigare tali effetti avversi, bilanciando in modo opportuno le posizioni attive e passive.

A differenza dell'**hedging perfetto**, che richiede la replica puntuale dei flussi di cassa futuri (come nel caso della *cash flow dedication*), l'uso della duration consente di ottenere una protezione efficace con un numero limitato di strumenti finanziari. Il principio di base è quello di eguagliare la duration del portafoglio delle **attività** a quella delle **passività**, in modo che piccole variazioni dei tassi d'interesse producano effetti compensativi sul valore complessivo del portafoglio.

Questo approccio risulta particolarmente utile nei contesti in cui non è possibile realizzare una copertura perfetta — ad esempio per l'assenza di titoli con determinate scadenze o per i costi elevati associati alla replica esatta dei flussi di cassa. In tale contesto, la duration fornisce una misura sintetica della sensibilità del valore del portafoglio ai movimenti dei tassi, permettendo al gestore di ridurre il rischio residuo.

Si consideri il seguente esempio illustrativo.

Esempio 8.2. *Determinare la quantità di titoli da vendere allo scoperto per coprire, tramite duration, una posizione lunga su un BTP a 7 anni, in previsione di un aumento dei tassi.*

Si consideri un gestore che detiene in portafoglio un BTP con scadenza a sette anni ($\bar{V}_1$), cedola annua 8%, quotato alla pari. Per un titolo alla pari il rendimento a scadenza coincide con il tasso cedolare:

$$y(0, 7) = 8.16\% \quad (\text{annuo}), \quad y_2(0, 7) = 4\% \quad (\text{semestrale}).$$

Gli analisti prevedono un rialzo dei tassi di interesse che causerà una perdita di valore sul titolo in portafoglio. Per neutralizzare l'esposizione ai movimenti dei tassi, il gestore può:

1. vendere il titolo e riacquistarlo successivamente, dopo lo shift dei tassi;
2. vendere allo scoperto un titolo simile, in modo che il guadagno sulla posizione corta compensi la perdita su quella lunga.

Si ipotizzi di vendere allo scoperto un BTP decennale ($\bar{V}_2$) con cedola 8%, anch'esso alla pari, con:

$$y(0, 10) = 8.16\%, \quad y_2(0, 10) = 4\%.$$

Assumendo una struttura dei tassi piatta, la condizione per una copertura efficiente richiede:

$$\frac{\Delta \bar{B}(0, 7)}{\bar{B}(0, 7)} = \frac{\Delta \bar{B}(0, 10)}{\bar{B}(0, 10)}.$$

Nel caso di struttura piatta, la variazione relativa del prezzo rispetto a uno shift parallelo è proporzionale alla modified duration:

$$MD(0, \bar{V}_1) = \alpha MD(0, \bar{V}_2),$$

dove α è il rapporto di copertura nominale (**hedge ratio**).

Le modified duration dei due titoli sono:

$$MD(0, \bar{V}_1) = \frac{5.49}{1 + 0.0816} = 5.08, \quad MD(0, \bar{V}_2) = \frac{7.07}{1 + 0.0816} = 6.53.$$

Da cui:

$$\alpha = \frac{MD(0, \bar{V}_1)}{MD(0, \bar{V}_2)} = \frac{5.08}{6.53} = 0.77725.$$

Se il gestore possiede €100,000 nominali del BTP a 7 anni, per ottenere la copertura deve vendere allo scoperto:

$$100,000 \times 0.77725 = €77,725$$

di valore nominale del BTP decennale.

Verifica ex post

Si ipotizzi uno shift di +20 bp su base semestrale, per cui il tasso passa dal 4% al 4.2% (8.58% annuo). I nuovi prezzi sono:

$$\bar{B}(0^+, 7) = 0.97915, \quad \bar{B}(0^+, 10) = 0.97329.$$

I valori delle posizioni risultano:

	$\bar{V}(0)$	$\bar{V}(0^+)$	$\Delta \bar{V}$
Long	100,000	97,915	-2,085
Short	77,725	75,649	+2,076
Totale			-9

Il valore della posizione corta è calcolato come:

$$V(0) = €100,000 \times 0.77725 \times 1 = €77,725$$

$$V(0^+) = €100,000 \times 0.77725 \times 0.97329 = €75,649.$$

La perdita complessiva del portafoglio risulta pari a soli €9, dimostrando l'efficacia della copertura ottenuta tramite duration. ■

Riassumendo, a fronte di una perdita sulla posizione lunga pari a €2,085, la posizione corta realizza un guadagno di €2,076, con un risultato netto complessivo di €9 in perdita.

Si verifica facilmente che, per uno shift di 50 bp (ovvero con $y_2(0, 7) = y_2(0, 10) = 4.5\%$), il risultato netto delle due posizioni diviene pari a €56 in perdita (*si lascia al lettore la verifica*). Il valore negativo della variazione complessiva riflette il fatto che la duration rappresenta solo un'approssimazione di primo ordine della variazione del prezzo di un titolo. Come illustrato nella Figura 5.4, la duration corrisponde geometricamente alla tangente alla curva che descrive la relazione tra prezzo e tasso

d'interesse. Essendo la derivata prima della funzione prezzo, essa fornisce una buona stima solo per variazioni ridotte dei tassi: per oscillazioni più ampie, l'approssimazione lineare risulta via via meno accurata, e la duration tende a sovra- o sottostimare le variazioni *effettive* dei prezzi.

8.4.1 Duration gap e aggiustamento dell'hedge ratio

Un ulteriore limite delle strategie di **hedging** basate sulla duration riguarda la necessità di **manutenzione periodica della copertura**. Il pagamento delle cedole, le variazioni dei prezzi e gli shift della struttura dei tassi modificano la duration dei titoli, alterando di conseguenza anche l'*hedge ratio*.

Nell'esempio precedente, uno shift di 20 bp comporta una variazione dell'hedge ratio pari allo 0.9% (da 0.77725 a 0.78426). Per ristabilire la copertura, è necessario vendere allo scoperto ulteriori €701 di valore nominale del titolo $\bar{V}_2$. Il disallineamento tra le duration — detto **duration gap** — riduce l'efficacia della copertura, esponendo il portafoglio a potenziali perdite più consistenti. Nella pratica, l'hedge non viene ribilanciato ad ogni variazione dei tassi: si preferisce monitorare il duration gap e intervenire solo quando il disallineamento supera una soglia ritenuta significativa.

Nel caso analizzato, l'hedge è stato costruito con titoli aventi lo stesso prezzo:

$$\bar{B}(0, 7) = \bar{B}(0, 10) = 1,$$

in modo che le variazioni relative di prezzo risultino identiche. Tuttavia, se i titoli presentano prezzi diversi, variazioni relative uguali generano variazioni assolute differenti, riducendo l'efficacia della copertura.

Si considerino due titoli, $\bar{V}_m$ e $\bar{V}_q$, con quotazioni:

$$\bar{B}(t, t_m) = 1, \quad \bar{B}(t, t_q) = 0.85,$$

e con la stessa modified duration:

$$MD(t, \bar{V}_1) = MD(t, \bar{V}_2) = 3.$$

Un incremento dell'1% dei tassi produce una variazione del 3% dei prezzi. Le variazioni assolute risultano quindi:

$$\Delta \bar{B}(t, t_m) = -1 \times 0.03 = -0.03, \quad \Delta \bar{B}(t, t_q) = -0.85 \times 0.03 = -0.0255.$$

Vendendo allo scoperto un euro di valore nominale di $\bar{V}_2$ a copertura di $\bar{V}_1$, si realizza un **under-hedge** pari a €0.0045.

Quando i prezzi differiscono, l'hedge ratio deve essere calcolato uguagliando le variazioni *assolute* dei prezzi. Poiché:

$$\frac{\Delta \bar{B}(t, t_m)}{\bar{B}(t, t_m)} = -MD(t, \bar{V}_1) \Delta i, \quad \frac{\Delta \bar{B}(t, t_q)}{\bar{B}(t, t_q)} = -MD(t, \bar{V}_2) \Delta i,$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{B}(t, t_m) &= -MD(t, \bar{V}_1) \bar{B}(t, t_m) \Delta i, \\ \Delta \bar{B}(t, t_q) &= -MD(t, \bar{V}_2) \bar{B}(t, t_q) \Delta i. \end{aligned}$$

Uguagliando le variazioni assolute:

$$\Delta \bar{B}(t, t_m) = \alpha \Delta \bar{B}(t, t_q),$$

da cui:

$$\alpha = \frac{MD(t, \bar{V}_1) \bar{B}(t, t_m)}{MD(t, \bar{V}_2) \bar{B}(t, t_q)}.$$

Dal momento che la variazione assoluta di prezzo corrisponde alla **dollar duration** (più precisamente, alla dollar modified duration), l'hedge ratio può essere espresso anche nella forma:

$$\alpha = \frac{DD(t, \bar{V}_1)}{DD(t, \bar{V}_2)}.$$

Nel caso in cui gli YTM dei due titoli si modifichino in modo non uniforme, la formula generale per l'hedge ratio diventa:

$$\alpha = \frac{MD(t, \bar{V}_1) \bar{B}(t, t_m) \Delta i_1}{MD(t, \bar{V}_2) \bar{B}(t, t_q) \Delta i_2}. \quad (8.1)$$

La relazione (8.1) è sufficientemente generale da consentire l'hedging anche in presenza di una struttura non piatta. Come visto nella sezione dedicata alla semielasticità, se lo shift dei tassi avviene in proporzione δi , la variazione di prezzo è approssimata dalla (5.13). Uguagliando le variazioni assolute:

$$-D(0, \bar{V}_1) \bar{B}(t, t_m) \delta i = -\alpha \left[D(0, \bar{V}_2) \bar{B}(t, t_q) \delta i \right],$$

da cui si ricava:

$$\alpha = \frac{D(0, \bar{V}_1) \bar{B}(t, t_m)}{D(0, \bar{V}_2) \bar{B}(t, t_q)}. \quad (8.2)$$

Se le variazioni degli YTM sono identiche ($\Delta i_1 = \Delta i_2$), le espressioni (8.1) e (8.2) differiscono solo per il fattore:

$$\frac{1 + i_2}{1 + i_1}.$$

Si osservi che, in generale, la struttura dei tassi presenta un'inclinazione contenuta; ne consegue che il suvvisto rapporto è prossimo all'unità. Ad esempio, la struttura del 30 novembre 2025 (Tabella 7.1) presenta uno YTM massimo del 4.11% e minimo dell'1.98%, per cui il rapporto risulta pari a 1.021, molto prossimo all'unità.

Esempio 8.3. *Determinare l'hedge ratio necessario per neutralizzare il rischio di tasso d'interesse associato a una posizione lunga in un BTP.*

Si consideri un investimento di valore nominale €1.000.000 nel BTP $\bar{V}_1$ con scadenza $m_1 = 2$ anni. Per ridurre l'esposizione alle variazioni dei tassi d'interesse, si utilizza come strumento di copertura il BTP $\bar{V}_2$ con scadenza $m_2 = 4$ anni, assumendo su quest'ultimo una posizione di segno opposto (short) rispetto a quella detenuta su $\bar{V}_1$ (long).

I dati di mercato sono:

	$\bar{V}_1$	$\bar{V}_2$
m_i	2	4
$y(0, m_i)$	2.14%	2.42%
$\bar{B}(0, m_i)$	1.08515	1.10786
$D(0, \bar{V}_i)$	1.91172	3.67990
$MD(0, \bar{V}_i)$	1.87167	3.59295

Sebbene la struttura dei tassi non sia piatta, la formula dell'**hedge ratio** basata sulle modified duration — si veda (8.1) — fornisce valori di α molto prossimi a quelli ottenuti mediante il rapporto tra le duration — si veda (8.2). La verifica numerica di tale equivalenza è lasciata al lettore.

Si ottiene quindi:

$$\alpha = \frac{MD(0, \bar{V}_1) \bar{B}(0, 2)}{MD(0, \bar{V}_2) \bar{B}(0, 4)}.$$

Sostituendo i valori:

$$\alpha = \frac{1.87167}{3.59295} \times \frac{1.08515}{1.10786} = 0.51025.$$

Per coprire la posizione nominale €1,000,000 in $\bar{V}_1$ occorre quindi assumere sul titolo $\bar{V}_2$ una posizione di segno opposto con valore nominale pari a:

$$€1,000,000 \times 0.51025 = €510,250.$$

Il controvalore ottenuto dalla vendita (al prezzo di mercato) è:

$$1.10786 \times €510,248.74 = €565,285.56.$$

8.5 Correzione per convexity nelle strategie di hedging

Nell'Esempio 8.2 si è osservato che il risultato netto di una strategia di hedging può risultare negativo — cioè, le perdite della posizione lunga possono superare i guadagni della posizione corta — e che tale inefficienza cresce con l'ampiezza dello *shift* dei tassi d'interesse. Ciò è dovuto al limite intrinseco della duration, che fornisce solo un'approssimazione lineare della variazione del prezzo in funzione delle variazioni dei tassi.

Per migliorare la precisione delle stime e ridurre l'errore di previsione, si introduce la **convexity**, che consente di “aggiustare” la variazione del prezzo incorporando un termine di secondo ordine.

Sia $\bar{B}(i)$ il prezzo di un titolo a reddito fisso come funzione del tasso i , in ipotesi di struttura piatta. Sviluppando $\bar{B}(i)$ in serie di Taylor, troncata al secondo ordine, si ottiene:

$$\bar{B}(i + \Delta i) \approx \bar{B}(i) + \bar{B}'(i)\Delta i + \frac{1}{2}\bar{B}''(i)(\Delta i)^2.$$

Dividendo entrambi i membri per $\bar{B}(i)$, si ricava:

$$\frac{\bar{B}(i + \Delta i) - \bar{B}(i)}{\bar{B}(i)} \approx \frac{\bar{B}'(i)}{\bar{B}(i)} \Delta i + \frac{1}{2} \frac{\bar{B}''(i)}{\bar{B}(i)} (\Delta i)^2. \quad (8.3)$$

Ricordando che:

$$\frac{\bar{B}'(i)}{\bar{B}(i)} = -\frac{1}{1+i} D(0, \bar{B}) \quad \text{e} \quad \frac{\bar{B}''(i)}{\bar{B}(i)} = C(0, \bar{B}),$$

si ottiene:

$$\frac{\bar{B}(i + \Delta i) - \bar{B}(i)}{\bar{B}(i)} \approx -\frac{1}{1+i} D(0, \bar{B}) \Delta i + \frac{1}{2} C(0, \bar{B}) (\Delta i)^2. \quad (8.4)$$

L'aggiustamento dovuto alla convexity dipende dal termine $(\Delta i)^2$: per variazioni ridotte dei tassi il suo contributo è trascurabile, ma diventa rilevante per *shift* più ampi.

Nella tabella seguente sono riportate le variazioni assolute del prezzo, ΔB , calcolate rispettivamente con la sola duration (D) e con la correzione di convexity (D, C):

bp	$\Delta B(D)$	$\Delta B(D, C)$
10	-0.006536	-0.006513
20	-0.013072	-0.012979
50	-0.032679	-0.032098
80	-0.052286	-0.050800
100	-0.065358	-0.063036
150	-0.098037	-0.092812
180	-0.117644	-0.110120
200	-0.130716	-0.121427
250	-0.163395	-0.148881

Le differenze tra le due stime diventano significative per *shift* superiori a circa 80 punti base. L'ampiezza di tale soglia dipende dalla convexity del titolo: a parità di tasso cedolare, i titoli con scadenza più lunga presentano una convexity maggiore; viceversa, a parità di scadenza, un coupon più elevato riduce la convexity.

In presenza di più titoli idonei all'hedging, la convexity consente di selezionare il titolo che garantisce la copertura più stabile, ossia quello che minimizza la perdita residua dopo variazioni ampie dei tassi.

8.5.1 Evoluzione della struttura dei tassi e limiti della duration

Le strategie di copertura basate sulla sola duration si fondano sull'ipotesi che la struttura a termine dei tassi d'interesse evolva attraverso **shift paralleli**, ossia traslazioni verticali dell'intera curva dei rendimenti. In questo caso, ogni punto della curva si sposta della stessa quantità, e la variazione del prezzo di un titolo può essere stimata linearmente tramite la sua duration.

Tale ipotesi semplifica notevolmente l'analisi, ma costituisce un'approssimazione della realtà. In pratica, i tassi a breve scadenza sono più volatili di quelli a lungo, generando movimenti **non paralleli** della curva dei rendimenti. L'evoluzione della struttura può essere interpretata come la combinazione di tre fattori principali — **level**, **slope** e **curvature** — che rappresentano le dimensioni fondamentali dei movimenti della curva.

In particolare:

- **Level** — rappresenta uno **shift parallelo** dell'intera curva, in cui tutti i tassi si muovono verso l'alto o verso il basso di un ammontare simile. È la componente più stabile e riflette, nella maggior parte dei casi, le variazioni del tasso ufficiale della banca centrale o del tasso privo di rischio di riferimento.
- **Slope** — misura la **pendenza** o inclinazione della curva, legata alla differenza tra tassi a breve e a lungo termine. Un incremento più marcato dei tassi a breve rispetto a quelli a lungo produce un **appiattimento** della curva (*flattening*); il caso opposto, in cui i tassi a lungo crescono più di quelli a breve, determina un **aumento della pendenza** (*steepening*).
- **Curvature** — rappresenta la **flessione** o “curvatura” della struttura, talvolta detta anche effetto *butterfly* o *hump*. In tale configurazione, i tassi a medio termine si muovono in direzione opposta rispetto a quelli di breve e lungo termine, modificando la concavità della curva.

Le strategie di copertura fondate sulla duration assumono che l'unico fattore rilevante sia il **level**, ovvero che le variazioni dei tassi siano perfettamente parallele. Tuttavia, movimenti nella **slope** o nella **curvature** generano variazioni di prezzo che la duration non è in grado di prevedere con precisione. Due titoli con la stessa duration possono infatti reagire in modo diverso a un cambiamento nella pendenza o nella forma della curva.

Evidenze empiriche mostrano che circa il 90% delle variazioni osservate nella struttura dei tassi può essere ricondotto al fattore di livello, ossia a movimenti approssimativamente paralleli. Ciò giustifica l'uso operativo della duration — eventualmente corretta per la convexity — come strumento efficace per la maggior parte delle strategie di hedging, pur riconoscendone i limiti in presenza di variazioni complesse della struttura a termine.

Esempio 8.4. Si confronti l'efficacia di due strategie di copertura in presenza di convexity differenti.

Dati i due titoli obbligazionari dell'Esempio 8.3, si consideri una terza obbligazione, $\bar{V}_3$, da utilizzare per coprire la posizione in $\bar{V}_1$.

$$\bar{V}_3 : c_3 = 10\%, \quad m_3 = 5.5, \quad y(0, 5.5) = 4.43\%.$$

I dati di ogni titolo sono riassunti di seguito:

	$\bar{V}_1$	$\bar{V}_2$	$\bar{V}_3$
$\bar{B}(0, m_i)$	1.08515	1.10786	1.27195
$D(0, \bar{V}_i)$	1.91172	3.67990	4.50737
$MD(0, \bar{V}_i)$	1.87167	3.59295	4.31616
$C(0, \bar{V}_i)$	5.42709	17.08798	25.10281

dove $MD(0, \bar{V}_i)$ e $C(0, \bar{V}_i)$ denotano rispettivamente la modified duration e la convexity del titolo $\bar{V}_i$, valutate al corrispondente yield $y(0, m_i)$.

Costruzione della copertura

Si consideri una posizione lunga nel titolo V_1 , coperta mediante una posizione corta in un titolo V_i , con $i \in \{2, 3\}$.

L'obiettivo è costruire un portafoglio di copertura la cui sensibilità alle variazioni dei tassi di interesse sia nulla. A tal fine si determina l'hedge ratio imponendo la neutralizzazione della sensibilità di primo ordine del valore del portafoglio rispetto allo yield.

L'hedge ratio α_i è determinato dalla condizione

$$\alpha_i \bar{B}(0, m_i) MD(0, \bar{V}_i) = \bar{B}(0, m_1) MD(0, \bar{V}_1).$$

Il valore del risultante portafoglio è quindi

$$\Pi_i = \bar{B}(0, m_1) - \alpha_i \bar{B}(0, m_i),$$

e, per costruzione,

$$MD(0, \Pi_i) = 0.$$

Si ottiene numericamente:

$$\alpha_2 = 0.51025, \quad \alpha_3 = 0.36996.$$

Ruolo della convexity

Come mostrato in (8.4), per variazioni finite dei tassi lo sviluppo di Taylor del valore del portafoglio Π_i è

$$\Delta \Pi_i \approx \frac{1}{2} C(0, \Pi_i) (\Delta y)^2,$$

in quanto il termine di primo ordine, rappresentato dalla modified duration $MD(0, \Pi_i)$, è nullo per costruzione.

Di conseguenza, la dinamica del portafoglio è determinata principalmente dal termine di secondo ordine; pertanto, la sua risposta alle variazioni dei tassi dipende dalla convexity dei titoli impiegati nella copertura.

Evidenza numerica

Le variazioni di valore sono calcolate valutando esattamente il prezzo dei titoli dopo lo shift dei tassi.

$$\Delta \bar{B}(0, m_i) = \bar{B}(y_i + \Delta y_i) - \bar{B}(y_i).$$

Per uno shift parallelo di 200 bp si ottiene:

$$\begin{aligned}\Delta\Pi_2 &= \Delta\bar{B}(0, m_1) - \alpha_2\Delta\bar{B}(0, m_2) = \\ &= -0.03947 + 0.51025 \times 0.07596 = -0.00071, \\ \Delta\Pi_3 &= \Delta\bar{B}(0, m_1) - \alpha_3\Delta\bar{B}(0, m_3) = \\ &= -0.03947 + 0.36996 \times 0.10370 = -0.00111.\end{aligned}$$

Per uno shift di 400 bp:

$$\begin{aligned}\Delta\Pi_2 &= -0.00269, \\ \Delta\Pi_3 &= -0.00416.\end{aligned}$$

Si osservi che, il portafoglio costruito con il titolo con convexity maggiore, V_3 , subisce perdite minori.

Analogamente, per riduzioni dei tassi il portafoglio con maggiore convexity produce guadagni più elevati.

Interpretazione

A parità di esposizione di primo ordine:

- maggiore convexity riduce le perdite per aumenti dei tassi;
- maggiore convexity amplifica i guadagni per riduzioni dei tassi;
- la convexity rappresenta quindi un beneficio derivante dalla curvatura della funzione prezzo–yield.

Questo risultato riflette il fatto che la convexity misura l'esposizione di secondo ordine al rischio di tasso e diventa rilevante per variazioni non infinitesime della struttura dei rendimenti.

Nella pratica, variazioni dei tassi di interesse di entità così elevata sono rare in orizzonti temporali brevi. Su orizzonti di medio-lungo termine, strategie di copertura basate esclusivamente sulla duration risultano generalmente poco efficaci e richiedono comunque frequenti ribilanciamenti, poiché il trascorrere del tempo determina un progressivo ampliamento del duration gap tra le posizioni.

Per tale ragione, l'impiego esplicito della convexity nelle strategie di copertura non è usuale nella pratica operativa. Tuttavia, in condizioni di

elevata volatilità nel mercato dei tassi, titoli caratterizzati da maggiore convexity possono risultare preferibili nella costruzione di strategie di copertura di posizioni lunghe.

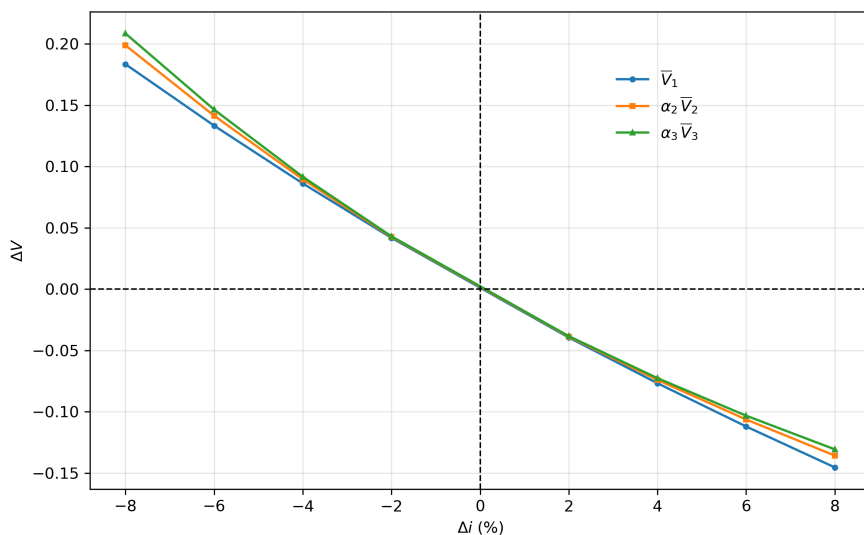


Figura 8.2: Variazioni assolute del valore delle posizioni nei titoli $\bar{V}_1$, $\alpha_2 \bar{V}_2$ e $\alpha_3 \bar{V}_3$ al variare dello shift dei tassi.

8.6 Approfondimento

Immunizzazione finanziaria

Una strategia di controllo del rischio di tasso d'interesse strettamente connessa al concetto di *hedging* è l'**immunizzazione finanziaria**. Essa nasce originariamente come alternativa alle strategie di *dedication* (o *cash flow creation*), ma, come si vedrà, può essere interpretata come una particolare applicazione dei principi generali della gestione del rischio.

Il problema tipico di immunizzazione riguarda un intermediario finanziario — ad esempio una banca o una compagnia di assicurazione — che detiene flussi di **attività** (asset) finanziati da flussi di **passività** (liability). Gli impieghi possono consistere in mutui o prestiti, mentre la raccolta può

derivare da depositi o polizze assicurative. L'obiettivo dell'intermediario è mantenere stabile il **margin** di **intermediazione**, ossia la differenza tra il rendimento medio degli attivi e il costo medio delle passività, al variare della struttura dei tassi.

Se i flussi di cassa in entrata e in uscita sono perfettamente allineati nel tempo (*perfect matching*), come illustrato nell'Esempio 8.1, il margine di intermediazione risulta insensibile alle variazioni dei tassi. Tuttavia, nella pratica, la replica perfetta dei flussi è difficile e spesso troppo costosa da realizzare.

A differenza delle strategie di *dedication*, che mirano a rendere identici i flussi di attivo e passivo, l'immunizzazione persegue un obiettivo meno rigido: rendere le **distribuzioni temporali** dei due flussi quanto più possibile simili. In tal modo, variazioni della struttura dei tassi influenzeranno in modo analogo il valore attuale di attività e passività, mantenendo sostanzialmente invariato il margine di intermediazione.

Sotto questo profilo, l'immunizzazione non è concettualmente diversa dall'**hedging**: entrambe le strategie mirano a compensare le variazioni di valore di una posizione con quelle, di segno opposto, di un'altra. La differenza principale consiste nel fatto che, mentre l'hedging si concentra su posizioni di mercato specifiche, l'immunizzazione riguarda la stabilità del valore complessivo di un portafoglio nel tempo.

L'ipotesi fondamentale alla base dei teoremi di immunizzazione è che la struttura dei tassi evolva tramite **shift additivi aleatori**, in cui la componente stocastica agisce solo sull'ampiezza e sul segno della variazione.

Si consideri un flusso di attività

$$\bar{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$$

e un flusso di passività

$$\bar{L} = \{L_1, L_2, \dots, L_m\},$$

entrambi definiti sul medesimo scadenziario

$$\bar{t} = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}.$$

Nell'istante di valutazione t , noti i prezzi dei titoli e quindi la struttura dei tassi, i due flussi sono in **equilibrio finanziario** se:

$$\bar{A}(t) = \bar{L}(t).$$

I flussi si dicono **immunizzati** se, in un istante successivo t^+ , dopo un eventuale shift additivo della curva dei tassi, il valore delle attività non risulta inferiore a quello delle passività:

$$\bar{A}(t^+) \geq \bar{L}(t^+),$$

ovvero, in termini equivalenti, se il valore netto del portafoglio rimane non negativo:

$$\bar{N}(t^+) = \bar{A}(t^+) - \bar{L}(t^+) \geq 0.$$

Nel caso in cui la liability sia costituita da un'unica uscita L , pagabile al tempo $H > t$, Fisher e Weil (1971)¹ dimostrano che la condizione di immunizzazione si verifica se e solo se:

$$\bar{A}(t) = LB(t, H),$$

e la **duration** del flusso di attività eguaglia la scadenza residua della passività:

$$D(t, \bar{A}) = H - t.$$

La condizione sulle duration assicura che attività e passività reagiscano in modo simile a uno shift dei tassi: una riduzione dei tassi aumenta tanto il valore delle liability quanto quello degli asset, preservando la solvibilità del portafoglio, cioè

$$\bar{A}(t^+) \geq \bar{L}(t^+).$$

L'unica differenza rispetto all'hedging risiede nella condizione di equilibrio finanziario iniziale. Come illustrato nell'Esempio 8.3 il valore della posizione lunga è

$$1,000,000 \times 1.08515 = \text{€}1,085,150,$$

mentre quello della posizione corta è

$$1,000,000 \times 0.51025 \times 1.10786 = \text{€}565,285.56.$$

Per rispettare la condizione di equilibrio (bilancio di valori), la copertura può essere ottenuta utilizzando due titoli invece di uno.

¹Fisher, L. and Weil, R.L. (1971) Coping with the Risk of Interest Rate. Journal of Business, 44, 408-431.

Da un punto di vista matematico, imporre due condizioni — equilibrio e uguaglianza delle duration — implica la risoluzione di un sistema di due equazioni. Affinché tale sistema ammetta soluzione, il numero delle incognite deve essere almeno pari al numero delle equazioni. In questo caso si dice che il portafoglio (costituito da una posizione lunga e una corta) ha costo iniziale nullo.

Indicando con $\bar{V}_1$ il titolo con scadenza t_p e con $\bar{V}_2, \bar{V}_3$ due titoli con scadenze t_m e t_q , la condizione di equilibrio finanziario richiede che:

$$\alpha \bar{B}(t, t_m) + \beta \bar{B}(t, t_q) = \bar{B}(t, t_p), \quad (8.5)$$

dove α e β rappresentano i pesi (in valore nominale) dei due titoli nel portafoglio.

La condizione di **uguaglianza delle duration**, analogamente a quanto visto nell'Esempio 8.3, è:

$$\alpha d_2 D(t, \bar{V}_2) + \beta d_3 D(t, \bar{V}_3) = D(t, \bar{V}_1), \quad (8.6)$$

dove

$$d_2 = \frac{\bar{B}(t, t_m)}{\bar{\Pi}(t)}, \quad d_3 = \frac{\bar{B}(t, t_q)}{\bar{\Pi}(t)}, \quad \bar{\Pi}(t) = \bar{B}(t, t_p).$$

Sostituendo nella relazione precedente, si ottiene la forma compatta della condizione di uguaglianza delle duration (**duration match**):

$$\alpha \bar{B}(t, t_m) D(t, \bar{V}_2) + \beta \bar{B}(t, t_q) D(t, \bar{V}_3) = \bar{B}(t, t_p) D(t, \bar{V}_1). \quad (8.7)$$

Esempio 8.5. *Determinare i pesi del portafoglio che garantiscano l'equilibrio finanziario e il matching delle duration.*

Si considerino i titoli $\bar{V}_1, \bar{V}_2$ e $\bar{V}_3$ descritti nell'Esempio 8.4. Sostituendo i valori numerici nelle equazioni di equilibrio finanziario e di duration match (Eqn. 8.5 e 8.7), il sistema nelle incognite α e β risulta:

$$1.10786 \alpha + 1.27195 \beta = 1.08515,$$

$$4.07681 \alpha + 5.73315 \beta = 2.07450.$$

La soluzione del sistema fornisce:

$$\alpha = 3.07254, \quad \beta = -1.82303.$$

Il valore negativo di β ha un chiaro significato finanziario. Nel contesto di una strategia di copertura di una posizione *lunga*, il portafoglio replicante viene assunto in posizione *corta*. Pertanto, coefficienti positivi individuano quantitativi da vendere allo scoperto, mentre un valore negativo implica l'assunzione della posizione opposta. In particolare, essere **short** di -1.82303 equivale ad essere **long** di 1.82303 nel titolo $\bar{V}_3$, per ogni euro di nominale in V_1 .

Il portafoglio di immunizzazione è quindi composto da:

- una **posizione corta** di 3.07254 nel titolo $\bar{V}_2$;
- una **posizione lunga** di 1.82303 nel titolo $\bar{V}_3$,

per ogni euro di nominale detenuto nel titolo $\bar{V}_1$.

Supponendo che il valore nominale del titolo $\bar{V}_1$ sia pari a €500,000, le posizioni di copertura risultano:

$$\begin{aligned}\text{short } \bar{V}_2 &: 500,000 \times 3.07254 = \text{€}1,536,270, \\ \text{long } \bar{V}_3 &: 500,000 \times 1.82303 = \text{€}911,515.\end{aligned}$$

La presenza di posizioni di segno opposto nel portafoglio di copertura deriva dal fatto che il prezzo e la duration del titolo $\bar{V}_1$ non si collocano nell'intervallo determinato dai corrispondenti valori dei titoli $\bar{V}_2$ e $\bar{V}_3$. Poiché le grandezze del portafoglio sono ottenute come combinazione lineare dei prezzi e delle duration dei titoli componenti (ossia come medie ponderate), l'uguaglianza con $D(0, \bar{V}_1)$ richiede necessariamente che uno dei coefficienti — in questo caso β — assuma valore negativo.

Verifica facoltativa

Il lettore verifichi che, nel caso di immunizzazione del titolo $\bar{V}_2$, il portafoglio di copertura può essere espresso come combinazione dei titoli $\bar{V}_1$ e $\bar{V}_3$, con posizioni rispettivamente pari a 0.32546 e 0.59333 per ogni euro nominale di $\bar{V}_2$. Tale esercizio mette in evidenza un caso in cui tutte le posizioni del portafoglio di copertura sono di tipo *short*. ■

Evoluzione deterministica e stabilità dell'immunizzazione

Un'interessante proprietà dei flussi finanziari immunizzati riguarda la loro stabilità nel tempo.

Siano $\bar{A}$ e $\bar{L}$ due flussi immunizzati all'istante di valutazione t . Se nell'intervallo temporale $[t, t']$, la struttura dei tassi evolve in modo puramente deterministico — cioè in assenza di perturbazioni aleatorie — i due flussi rimangono immunizzati anche al tempo t' .

Questa proprietà implica che, in presenza di un'evoluzione deterministica della struttura dei tassi e purché non giungano a scadenza poste appartenenti ai flussi considerati, non è necessario ricalibrare il portafoglio. In termini di *hedging*, ciò significa che le posizioni assunte nel portafoglio di copertura possono essere mantenute invariate nel tempo.

Tale risultato si verifica facilmente osservando che, nel caso di evoluzione deterministica della struttura, la condizione di equilibrio finanziario (8.5) diventa:

$$\frac{\bar{A}(t)}{B(t, t')} = \frac{\bar{L}(t)}{B(t, t')}.$$

Analogamente, la condizione di uguaglianza delle duration (8.6) si traduce in:

$$D(t, \bar{A}) - (t' - t) = H - t - (t' - t).$$

La prima relazione discende direttamente dal **teorema dei prezzi certi**, secondo cui, in assenza di incertezza, il valore futuro di un'attività è determinato univocamente dal prezzo capitalizzato al tasso a pronti per impieghi di pari durata. La seconda relazione deriva invece dalla proprietà della duration in caso di evoluzione deterministica, per cui l'orizzonte temporale si riduce dello stesso ammontare $t' - t$ per tutti i flussi.

Poiché entrambi i membri dell'equazione di equilibrio sono divisi per lo stesso fattore di sconto $B(t, t')$, la condizione di equilibrio finanziario risulta automaticamente preservata. Allo stesso modo, le duration dei due flussi si accorciano della stessa quantità, garantendo il mantenimento del **matching delle duration**.

Nella pratica, un'evoluzione perfettamente deterministica della struttura dei tassi è altamente improbabile. Tuttavia, questa proprietà ha importanti implicazioni operative: in contesti di relativa stabilità dei

mercati, è possibile limitarsi a monitorare il **duration gap** e intervenire per il riallineamento solo quando si verificano variazioni significative dei tassi o giungono a scadenza poste appartenenti ai flussi di attività o di passività.

Esempio 8.6. *Determinare la composizione di un portafoglio di titoli obbligazionari in grado di immunizzare una passività futura.*

Un'azienda dovrà effettuare un pagamento di $L = \text{€}10,000,000$ tra $H = 4$ anni. Il tesoriere intende immunizzare tale passività costruendo un portafoglio di BTP.

I titoli disponibili presentano le seguenti caratteristiche:

- **Cedole annuali:** $c_1 = 5\%$, $c_2 = 8\%$, $c_3 = 10\%$;
- **Scadenze:** $m_1 = 4$ anni, $m_2 = 7$ anni, $m_3 = 5,5$ anni;
- **Prezzi unitari:** $\bar{B}(0, m_1) = 1.0323$, $\bar{B}(0, m_2) = 1.2093$, $\bar{B}(0, m_3) = 1.2720$;
- **Duration:** $D(0, \bar{V}_1) = 3.6781$, $D(0, \bar{V}_2) = 5.632$, $D(0, \bar{V}_3) = 4.4953$ anni.

Si assuma inoltre che il valore attuale di un euro esigibile fra quattro anni sia $B(0, 4) = 0.8483$.

Per immunizzare la passività è necessario costruire un portafoglio composto da almeno due titoli. Affinché le soluzioni del sistema risultino positive — e quindi il portafoglio sia formato da posizioni lunghe (acquisto) — la duration della liability deve essere compresa tra le duration dei titoli selezionati.

Si considerino le due coppie di titoli $\{\bar{V}_1, \bar{V}_2\}$ e $\{\bar{V}_1, \bar{V}_3\}$. Impostando il problema per una liability unitaria, i sistemi di equazioni che garantiscono l'equilibrio finanziario e il matching delle duration sono:

$$\begin{aligned} 1.0323 \alpha_1 + 1.2093 \alpha_2 &= 0.8483, \\ 3.6781 \times 1.0323 \alpha_1 + 5.632 \times 1.2093 \alpha_2 &= 0.8483 \times 4; \\ 1.0323 \alpha_1 + 1.2720 \alpha_3 &= 0.8483, \\ 3.6781 \times 1.0323 \alpha_1 + 4.4953 \times 1.2720 \alpha_3 &= 0.8483 \times 4. \end{aligned}$$

Le soluzioni dei due sistemi, espresse in termini di nominali per ogni euro di liability, sono:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6864 \\ 0.1156 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4981 \\ 0.2627 \end{bmatrix}.$$

Per il primo portafoglio $(\bar{V}_1, \bar{V}_2)$, i nominali necessari per immunizzare la liability di €10,000,000 sono:

$$\bar{V}_1 : 10,000,000 \times 0.6864 = \text{€}6,863,748.49,$$

$$\bar{V}_2 : 10,000,000 \times 0.1156 = \text{€}1,155,670.58.$$

Il valore del portafoglio coincide con il valore attuale della liability:

$$6,863,748.49 \times 1.0323 + 1,155,670.58 \times 1.2093 = \text{€}8,483,000.$$

Si ipotizzi ora che, dopo 0.25 anni, la struttura subisca uno **shift additivo** di 30 bp. I nuovi prezzi dei titoli risultano:

$$\bar{B}(0.25, m_1) = 1.0298, \quad \bar{B}(0.25, m_2) = 1.1994, \quad \bar{B}(0.25, m_3) = 1.2658.$$

Il valore del portafoglio $\{\bar{V}_1, \bar{V}_2\}$ diventa:

$$6,863,748.49 \times 1.0298 + 1,155,670.58 \times 1.1994 = \text{€}8,454,399.49,$$

mentre il valore della liability è:

$$\text{€}10,000,000 \times 0.8455 = \text{€}8,454,540.$$

Il valore netto post-shift è quindi:

$$8,454,399\text{€} - 8,454,540\text{€} = -141\text{€}.$$

Verifica facoltativa

Si verifichi che, per uno shift di 80 bp, il valore netto post-shift risulta pari a €-374.69.



Capitolo 9

Futures

9.1 Definizione e struttura

Un **future** è un accordo giuridicamente vincolante tra due controparti per la compravendita di un'attività finanziaria a una data futura prefissata e a un prezzo stabilito al momento della stipula. L'attività oggetto del contratto, detta anche **sottostante** (o *underlying asset*), può essere un titolo a reddito fisso, un indice, una valuta, una materia prima o un tasso d'interesse.

Il future si distingue da un contratto **forward** per tre caratteristiche fondamentali:

1. **Standardizzazione e mercato regolamentato.** I futures sono negoziati in mercati organizzati e possiedono caratteristiche standard riguardanti quantità, scadenza e natura dell'attività sottostante. I contratti forward, invece, sono accordi bilaterali *over-the-counter* (OTC), personalizzabili in ogni aspetto — scadenze, quantità e specifiche del sottostante.
2. **Regolamento giornaliero e mark-to-market.** Il valore di una posizione in futures è aggiornato alla fine di ogni seduta di mercato e le perdite o i profitti sono regolati giornalmente tramite la procedura di **mark-to-market**. Nel contratto forward, al contrario, il regolamento monetario avviene in un'unica soluzione in T .
3. **Liquidabilità.** Una posizione aperta su un future (long o short) può essere chiusa in qualsiasi momento prima della scadenza mediante

un'operazione di segno opposto. Nel caso dei forward, la chiusura anticipata richiede una nuova negoziazione tra le parti.

Nei paragrafi successivi si analizzeranno i **futures sui tassi di interesse**, sia a breve termine (futures sull'EURIBOR a tre mesi), sia a lungo termine (futures sul BTP o sul Bund decennale). In particolare, sarà illustrato come tali strumenti possono essere utilizzati nelle strategie di **copertura** di portafogli obbligazionari, con l'obiettivo di ridurre il rischio di tasso d'interesse.

9.1.1 Specifiche contrattuali

In un future una controparte si impegna ad acquistare, e l'altra a vendere, una quantità predeterminata dell'attività sottostante. Nel caso dei **futures su tassi d'interesse**, il sottostante può essere un titolo obbligazionario a lungo termine con caratteristiche standardizzate (ad esempio un Bund o un BTP decennale), oppure un tasso di interesse a breve termine, come l'EURIBOR a tre mesi.

L'ammontare nozionale del contratto e la data di consegna definiscono in modo univoco le caratteristiche di ciascun future. Le Figure 9.1, 9.2 e 9.3 riportano, rispettivamente, le specifiche dei contratti sull'EURIBOR a tre mesi, sul BTP a dieci anni e sul Bund a dieci anni¹.

Per entrambi i contratti è specificato:

- il **valore nominale** scambiato alla data di consegna (ad esempio, €100,000 per un contratto sul BTP o sul Bund);
- le **scadenze di consegna**, tipicamente fissate nei mesi di marzo, giugno, settembre e dicembre per i future sull'EURIBOR, con contrattazioni attive su sei scadenze trimestrali consecutive (fino a circa 22 mesi in avanti);
- nel caso dei **future obbligazionari**, la **cedola standard** del titolo sottostante specificata nel contratto.

¹ Nel prosieguo si farà riferimento principalmente al Bund future. Dopo la convergenza dei tassi europei e l'integrazione monetaria, non sussistono differenze sostanziali tra Bund e BTP. In prospettiva, tali titoli potrebbero essere sostituiti da un unico titolo di riferimento emesso a livello europeo.

Sebbene alcune specifiche operative (ad esempio luogo di consegna o calendario delle scadenze) possano variare, nel seguito facciamo riferimento alle specifiche contrattuali del mercato europeo dei derivati **EUREX**, che rappresenta oggi il principale punto di riferimento per i futures sui titoli di Stato dell'area euro. Altri mercati, come il **LIFFE** (London International Financial Futures Exchange), presentano caratteristiche contrattuali sostanzialmente simili.

Il prezzo ufficiale di ciascun future è pubblicato giornalmente dall'ente gestore del mercato. Un operatore che acquista un future assume una **posizione lunga** e si impegna, alla scadenza, a ricevere (o consegnare) l'ammontare del nozionale stabilito. Analogamente, la vendita di un future genera una **posizione corta**.

Come nei contratti forward, l'acquisto di un future non comporta un esborso iniziale: il prezzo di mercato rappresenta il valore a cui avverrà la transazione alla data futura di regolamento.

Three-Month EURIBOR Futures (FEU3)

Unit of trading	€2,500 × Rate Index
Delivery months	March, June, September, December, and four serial months, such that 28 delivery months are available for trading, with the nearest three delivery months being consecutive calendar months
Delivery day	First business day after the Last Trading Day
Last trading day	10.00, two business days prior to the third Wednesday of the delivery month
Quotation	100 minus rate of interest
Minimum price movement (Tick size & value)	0.0025 (€6.25)
Trading hours	08.00 – 19.00

Contract standard: Cash settlement based on the Exchange Delivery Settlement Price (EDSP).

Exchange Delivery Settlement Price (EDSP): Based on the European Money Markets Institute (EMMI) has determined the EURIBOR reference interest rate pertaining to three-month euro term deposits; otherwise, the exchange day immediately preceding that day. Close of trading in the maturing futures on the last trading day is at 11:00 CET.

Source: <https://www.eurex.com/ex-en/markets/int/mon/euribor-derivatives/euribor/Three-Month-EURIBOR-Futures-137458>

Figura 9.1: Specifiche di un future sull'EURIBOR a tre mesi.

Long-Term Euro-BTP Futures (FBTP)

Unit of trading	€100,000 nominal value notional Italian government bond with 6% coupon
Delivery months	March, June, September, December, such that the nearest three delivery months are available for trading
Delivery day	Tenth calendar day of delivery. If such a day is not a business day, then the Delivery Day will be the following business day
Last trading day	Two exchange days prior to the delivery day of the relevant maturity month. Close of trading in the maturing futures on the last trading day is at 12:30 CET.
Quotation	Per €100 nominal
Minimum price movement (Tick size & value)	0.01 (€10)
Trading hours	08.00 – 19.00

Contract standard: Delivery may be made of any Buoni del Tesoro Poliennali (BTP) with 8 1/2 to 10 1/2 years remaining maturity as at the tenth calendar day of the delivery month, provided that any such BTP has a minimum amount in issue of €2,000,000,000.

Exchange Delivery Settlement Price (EDSP): The final settlement price is established by Eurex on the final settlement day at 12:30 CET based on the volume-weighted average price of all trades during the final minute of trading provided that more than ten trades occurred during this minute; otherwise the volume-weighted average price of the last ten trades of the day, provided that these are not older than 30 minutes. If such a price cannot be determined, or does not reasonably reflect the prevailing market conditions, Eurex will establish the final settlement price.

Source: <https://www.eurex.com/ex-en/markets/int/fix/government-bonds/Long-Term-Euro-BTP-Futures-137382>

Figura 9.2: Specifiche di un future sul BTP a 10 anni denominato in euro.

Euro-Bund Futures (FGBL)

Unit of trading	€100,000 nominal value notional German government bond with 6% coupon
Delivery months	March, June, September, December, such that the nearest three delivery months are available for trading
Delivery day	Tenth calendar day of delivery. If such a day is not a business day, then the Delivery Day will be the following business day
Last trading day	Two exchange days prior to the delivery day of the relevant maturity month. Close of trading in the maturing futures on the last trading day is at 12:30 CET.
Quotation	Per €100 nominal
Minimum price movement (Tick size & value)	0.01 (€10)
Trading hours	08.00 – 19.00

Contract standard: Delivery may be made of any Bundesanleihe with 8 1/2-10 1/2 years remaining maturity as at the tenth calendar day of the delivery month, providing that any such Bund has a minimum amount in issue of €2,000,000,000

Exchange Delivery Settlement Price (EDSP): The final settlement price is established by Eurex on the final settlement day at 12:30 CET based on the volume-weighted average price of all trades during the final minute of trading provided that more than ten trades occurred during this minute; otherwise, the volume-weighted average price of the last ten trades of the day, provided that these are not older than 30 minutes. If such a price cannot be determined, or does not reasonably reflect the prevailing market conditions, Eurex will establish the final settlement price.

Source: <https://www.eurex.com/ex-en/markets/int/fix/government-bonds/Euro-Bund-Futures-137298>

Figura 9.3: Specifiche di un future sul Bund a 10 anni denominato in euro.

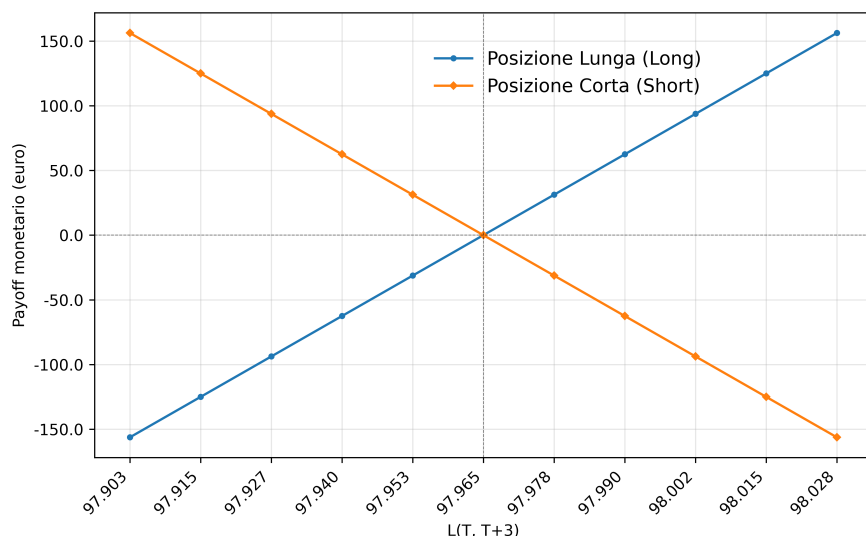


Figura 9.4: Payoff in T di una posizione lunga e corta in un future EURIBOR a tre mesi ($K = 97.965$). Il payoff è $L(T, T + \tau) - K$ per la posizione lunga e il suo opposto per la corta; il valore monetario (asse y) è dato dal numero di tick moltiplicato per il valore di ciascun tick (Sezione 9.2).

9.1.2 Quotazione

In questa sezione si descriverà la quotazione e il payoff dei futures sui tassi d'interesse, introducendo il caso dei contratti sull'EURIBOR a tre mesi, in quanto la loro valutazione richiede un passaggio preliminare per determinare il prezzo del future a partire dal tasso EURIBOR.

A differenza dei futures sui titoli obbligazionari a lungo termine, per i quali la quotazione è espressa direttamente in percentuale del valore facciale del titolo sottostante, i futures su tassi a breve termine sono quotati in funzione del tasso di interesse oggetto del future. Una volta determinato il prezzo del deposito implicito nel contratto, i meccanismi di determinazione del payoff per le posizioni lunghe e corte coincidono con quelli tipici dei futures sui titoli a lungo termine.

Si indichi con l_K il **tasso future**. Come specificato nelle caratteristiche contrattuali, i futures sui tassi a breve sono quotati secondo la convenzione

$$\text{Prezzo future} = 100 - l_K.$$

Si assuma che l'**Euribor Futures** negoziato su Eurex quoti a 97.965. Ciò implica che l'acquirente del contratto "acquista" un deposito EURIBOR a tre mesi al tasso:

$$l_K = 100 - 97.965 = 2.035\%.$$

Per un contratto con valore facciale di €1,000,000 e tasso $l_K = 2.035\%$, si ottiene:

$$K = €1,000,000 \times 0.97965 = €979,650.$$

Pertanto, alla data di consegna l'operatore con posizione lunga versa €979,650 e riceve €1,000,000 dopo tre mesi. Come vedremo in seguito, nella pratica, i futures vengono generalmente chiusi prima della scadenza e il guadagno o la perdita è regolato in contanti.

Nel caso dei futures, il **contract value** rappresenta la grandezza economica di riferimento per il dimensionamento delle strategie di copertura e per la determinazione dei margini richiesti dall'operazione.

Per i future sui tassi a breve termine, Eurex definisce il *contract value* come $2,500 \times \text{Index Point}$; pertanto, a una quotazione di 97,96, il valore del contratto è pari a €244,900. La determinazione dei profitti e delle perdite fa comunque riferimento al nozionale implicito del contratto, corrispondente a un deposito standard di EUR €1,000,000.

In termini formali, indicando con $l(T, T + \tau)$ il tasso EURIBOR osservato al tempo T con scadenza $T + \tau$, la quotazione del future alla scadenza è

$$L(T, T + \tau) = 100 - l(T, T + \tau).$$

Se il tasso EURIBOR osservato alla consegna è maggiore di quello fissato nel future, $l(T, T + \tau) > l_K$, allora $L(T, T + \tau) < K$: la posizione lunga registra una perdita, poiché il rendimento di mercato eccede quello fissato contrattualmente e la differenza viene regolata per cassa.

Viceversa, se $l(T, T + \tau) < l_K$, si ha $L(T, T + \tau) > K$: la posizione lunga realizza un guadagno, in quanto il rendimento di mercato è inferiore al tasso concordato e la differenza viene corrisposta a suo favore.

9.1.3 Payoff

Si definisce **payoff** del future il risultato monetario del contratto alla scadenza:

$$L(T, T + \tau) - K. \quad (9.1)$$

In particolare, l'espressione (9.1) rappresenta il payoff della **posizione lunga**, che risulta positivo quando il prezzo del future alla scadenza supera il prezzo contrattuale e negativo nel caso opposto. Come si può osservare, il payoff della posizione lunga è una funzione crescente del prezzo del future e funzione decrescente del tasso EURIBOR osservato alla scadenza.

Il payoff della **posizione corta** è invece di segno opposto ed è pari a

$$- [L(T, T + \tau) - K].$$

Nella Figura 9.4 sono rappresentati i payoff monetari di una posizione lunga e di una posizione corta per un future sull'EURIBOR a tre mesi.

Il profilo è analogo a quello di una posizione spot (Figura 8.1), con la differenza che il prezzo di riferimento non è il prezzo spot del sottostante, bensì il prezzo future K fissato contrattualmente.

Nel caso dei futures sui titoli a lungo termine, la forma del payoff per la posizione lunga e per la posizione corta è del tutto analoga. Cambia unicamente il prezzo di riferimento K , che coincide con la quotazione del future al momento dell'apertura della posizione. Tale quotazione è espressa in percentuale del valore facciale del titolo sottostante.

9.1.4 Evoluzione e chiusura delle posizioni

Si indichi con $F(t, T)$ il **prezzo del future** osservato in t con consegna in T . Per semplicità, il parametro relativo alla scadenza del sottostante è omissivo: il future ha infatti rilevanza finanziaria solo fino alla data di consegna T , e le caratteristiche dell'attività sottostante (ad esempio, un Bund a 10 anni) sono già definite nelle specifiche contrattuali.

Al momento dell'apertura della posizione, il prezzo future è fissato a:

$$K(t) = F(t, T).$$

Nei giorni successivi, il prezzo del contratto evolve in funzione del valore del sottostante. Un operatore che entra successivamente nello stesso contratto bloccherà il nuovo prezzo di consegna al livello:

$$K(t + 1) = F(t + 1, T).$$

Per esempio, in t_1 l'*Euro-Bund Futures* quota $F(t_1, T) = 129.67$. In una data successiva, t_2 , il future con la stessa scadenza T quota $F(t_2, T) = 129.97$.

Gli operatori che assumono posizione in tale data fissano quindi il prezzo di consegna a $K(t_2) = 129.97$.

In genere, un future non viene mantenuto fino alla consegna: gli operatori lo utilizzano prevalentemente per finalità di copertura o di speculazione e chiudono la posizione quando le condizioni di mercato risultano favorevoli. La chiusura di un future avviene assumendo una posizione uguale e contraria a quella iniziale. Ad esempio, un operatore con posizione corta su 5 futures chiude l'operazione acquistando 5 contratti identici. I proventi e le perdite delle due posizioni si compensano.

Alla fine di ogni giornata di contrattazione, la società di compensazione del mercato future (clearing house) aggiorna le posizioni tramite il meccanismo del **mark-to-market**, compensando profitti e perdite giornaliere e annullando automaticamente le posizioni contrarie. La somma delle posizioni lunghe (o, in modo equivalente, delle posizioni corte) rimaste aperte rappresenta la **posizione netta del mercato**, nota come **open interest**.

9.2 Il meccanismo del mark-to-market

Il **mark-to-market** (MTM) rappresenta uno degli elementi più caratteristici e rilevanti nel funzionamento dei futures. Attraverso questo meccanismo, i guadagni e le perdite maturati giornalmente su ogni posizione vengono regolati alla fine di ciascuna seduta di mercato. In tal modo si riduce il rischio di inadempienza (*default risk*) derivante da movimenti sfavorevoli dei prezzi, che potrebbero generare perdite eccessive per una delle controparti.

Si consideri, ad esempio, una posizione corta su un future sull'EURIBOR venduto al prezzo di 95. Se, alla consegna, il prezzo spot del deposito EURIBOR risulta pari a 100, la perdita unitaria (€5), moltiplicata per il numero di contratti negoziati, può essere ingente. Il meccanismo del mark-to-market consente di evitare l'accumulo di tali perdite nel tempo, regolando giornalmente i flussi monetari tra operatori long e short.

Alla chiusura di ogni sessione di negoziazione, la **Cassa di Compensazione e Garanzie (Clearing House)** determina il **prezzo ufficiale di regolamento giornaliero** (*daily settlement price*) per ciascun future. Questo prezzo rappresenta il riferimento per il calcolo dei flussi di mark-to-market relativi alle posizioni aperte.

Sia:

- $F(t-1, T)$ il prezzo di chiusura del future nel giorno $t-1$;
- $F(t, T)$ il prezzo di chiusura nel giorno t ;
- C il valore nozionale per contratto;
- n il numero di contratti sottoscritti.

Il flusso del mark-to-market giornaliero è dato da:

$$MTM(t-1, t) = nC[F(t, T) - F(t-1, T)]. \quad (9.2)$$

Per convenzione, $n > 0$ per una **posizione lunga** e $n < 0$ per una **posizione corta**. Un incremento del prezzo del future ($F(t, T) - F(t-1, T) > 0$) comporta quindi un guadagno per la posizione lunga e una perdita per quella corta, che sarà obbligata al pagamento dell'importo calcolato nella (9.2).

Per ogni future è definito anche il **tick**, ossia la variazione minima di prezzo significativa ai fini del regolamento giornaliero, e il relativo **valore monetario**. Ad esempio, nel future sul Bund decennale, il tick corrisponde a una variazione dello 0.01% del valore nozionale² e ha un valore monetario di €10 per contratto (si veda la Figura 9.3).

Se σ indica l'ampiezza di un singolo tick, il numero di tick di variazione del prezzo tra due giornate consecutive è:

$$\eta(t-1, t) = \frac{F(t, T) - F(t-1, T)}{\sigma}. \quad (9.3)$$

Il flusso del mark-to-market giornaliero generato da una posizione di n contratti si ottiene quindi come:

$$MTM(t-1, t) = n\eta(t-1, t)\phi, \quad (9.4)$$

dove ϕ rappresenta il valore monetario di un tick.

Le espressioni (9.2) e (9.4) definiscono il **valore monetario** del payoff del future, e sono sostanzialmente equivalenti. La seconda è spesso preferita, poiché consente di calcolare direttamente i flussi a partire dalle variazioni espresse in tick, senza modificare i dati di prezzo.

²In pratica, un tick equivale a 1 basis point, ovvero $0.01/100 = 0.0001$.

Per esempio, nel caso dei **futures sull'EURIBOR**, occorre considerare che la quotazione è espressa come $100 - l_K$, dove l_K è un tasso a tre mesi su base annuale. Nel calcolo del flusso $MTM(t-1, t)$, il tasso deve essere riportato su base trimestrale, ossia $l_K/4$. Ciò renderebbe necessario modificare i prezzi future nella (9.2). Per semplificare il calcolo e rendere confrontabili le variazioni di prezzo tra diverse tipologie di future, le specifiche contrattuali indicano il valore monetario del tick, utilizzato per convertire le variazioni di prezzo nei flussi di cassa generati dal *mark-to-market*.

Per il future sull'EURIBOR a tre mesi, la variazione minima di prezzo è pari a 0.0025%. Dato un valore nozionale di €1,000,000, il valore di un tick è:

$$0.0025\% \times €1,000,000 = €25.$$

Riportando il valore su base trimestrale, si ottiene:

$$\frac{25}{4} = €6.25,$$

come indicato nelle specifiche del contratto (Figura 9.1).

Esempio 9.1. *Determinare i flussi giornalieri del mark-to-market relativi a due posizioni in futures.*

Un operatore detiene una posizione lunga in $n_1 = 5$ contratti future sull'EURIBOR a tre mesi e una posizione corta in $n_2 = 3$ futures sul Bund decennale. L'evoluzione dei prezzi di regolamento giornalieri (*settlement price*) e i flussi corrispondenti del mark-to-market sono riportati nelle tabelle seguenti.

t	$F(t, T)$	$F(t-1, T)$	ϕ	$\eta(t-1, t)$	n_1	$MTM(t-1, t)$
1	95.523	95.654	6.25	-52	5	-1,625
2	95.730	95.523	6.25	82	5	2,562.5
3	95.500	95.730	6.25	-92	5	-2,875
4	96.235	95.500	6.25	294	5	9,187.5
5	96.634	96.235	6.25	159	5	4,968.75
6	96.280	96.634	6.25	-141	5	-4,406.25
Totale	96.280	95.654	6.25	250	5	7,812.5

Tabella 9.1: Simulazione del prezzo e dei flussi di mark-to-market per un future sull'EURIBOR a tre mesi.

t	$F(t, T)$	$F(t - 1, T)$	ϕ	$\eta(t - 1, t)$	n_2	$MTM(t - 1, t)$
1	109.260	109.470	10	-21	-3	630.0
2	109.825	109.260	10	56	-3	-1,680.0
3	110.200	109.825	10	38	-3	-1,140.0
4	110.156	110.200	10	-4	-3	120.0
5	110.057	110.156	10	-10	-3	300.0
6	110.567	110.057	10	51	-3	-1,530.0
Totale	110.567	109.470	10	110	-3	-3,300.0

Tabella 9.2: Simulazione del prezzo e dei flussi del mark-to-market per un future sul Bund a 10 anni.

L'ultima colonna riporta il flusso giornaliero del mark-to-market per ciascuna posizione. Si osservi che il mark-to-market complessivo, calcolato tra la prima e l'ultima data di contrattazione, coincide con la somma algebrica dei flussi giornalieri.

Per la posizione lunga sull'EURIBOR si ha:

$$\eta(1, 6) = \frac{0.9628 - 0.95654}{0.000025} = 250,$$
$$MTM(1, 6) = 5 \times 250 \times 6.25 = \text{€}7,812.5.$$

Analogamente, per la posizione corta sul Bund a 10 anni, il valore totale dei flussi del mark-to-market è pari a €-3,300. Il risultato netto dell'operatore, dato dalla somma delle due posizioni, è pertanto positivo per €4,512.50. ■

9.3 Prezzi dei futures e dei forward

Come visto nei capitoli precedenti, il prezzo di un contratto **forward** è identificato da tre parametri che rappresentano, rispettivamente, l'istante di valutazione, la data di consegna e la scadenza del titolo sottostante.

Quando la specificazione della scadenza del titolo non è rilevante, tale parametro può essere omissso e il prezzo del contratto è indicato con il simbolo $B^f(t, T)$, in luogo di $B(t, T, s)$. L'apice superiore distingue il prezzo *forward* dal prezzo *spot*.

Nella pratica e nella letteratura finanziaria si adotta spesso una notazione ancora più semplice, rappresentando il prezzo forward con $f(t, T)$. D'ora in avanti, quando non sarà necessario specificare la scadenza del titolo sottostante, si utilizzerà il simbolo $f(t, T)$ per indicare il prezzo forward e $B(t)$ per il prezzo spot del titolo sottostante.

Come ricordato nella Sezione 2.2, un **Forward Rate Agreement** definisce implicitamente il prezzo forward di un'operazione di finanziamento o investimento a termine. Il meccanismo finanziario che regola un FRA è analogo a quello di un future sui tassi a breve. Ad esempio, un future sull'EURIBOR a tre mesi negoziato in ottobre con consegna a dicembre consente di fissare il tasso a tre mesi di un'operazione che inizierà dopo due mesi, esattamente come un contratto $FRA_{2 \times 5}$.

La principale differenza risiede nel momento del regolamento: un contratto FRA è liquidato alla data di *fixing* e non comporta alcun pagamento prima di tale data. Nella Sezione 4.2 è illustrata la relazione che lega i prezzi a pronti e i prezzi a termine. Poiché un future è sostanzialmente equivalente a un contratto forward, in assenza di arbitraggio, i due contratti dovrebbero presentare lo stesso prezzo. Come si dimostrerà più avanti, tale equivalenza si verifica soltanto in presenza di un'evoluzione deterministica della struttura dei tassi. Nella realtà, i prezzi future e forward differiscono: la discrepanza è imputabile al meccanismo di **mark-to-market**, che interagisce con la natura aleatoria dei tassi d'interesse.

La relazione generale tra prezzo spot e prezzo forward può essere espressa come:

$$B(t, T, s) = B(t, s) M(t, T),$$

dove $M(t, T) = 1/B(t, T)$ rappresenta il fattore di capitalizzazione tra t e T . Assumendo una struttura esponenziale dei tassi, con intensità costante δ , si ha:

$$B(t, T, s) = B(t, s) e^{\delta(T-t)}.$$

Alla luce della notazione introdotta, il prezzo forward di un titolo diventa quindi:

$$f(t, T) = B(t) e^{\delta(T-t)}. \quad (9.5)$$

Il prezzo definito nella (9.5) è noto come **prezzo cash-and-carry**.

Dalla (9.5) si deduce che:

1. il prezzo forward si ottiene capitalizzando il prezzo spot al tasso di mercato, qui rappresentato da una struttura piatta di intensità δ ;
2. il prezzo forward è superiore al prezzo spot, salvo il caso in cui siano previsti flussi certi (come cedole) prima della consegna;
3. alla data di consegna ($t = T$) i prezzi spot e forward devono coincidere, e dunque il prezzo spot converge progressivamente verso il prezzo forward man mano che ci si avvicina alla scadenza.

La relazione (9.5) può essere ricavata analizzando il valore di un contratto forward prima della consegna. Sia $f(t_0, T)$ il prezzo forward fissato alla stipula. Alla consegna T , il valore del contratto è pari alla differenza tra il prezzo spot $B(T)$ e il prezzo sottoscritto $K = f(t_0, T)$. In un istante generico t , con $t_0 \leq t \leq T$, il valore attuale del payoff è:

$$V(t) = [B(T) - K] e^{-\delta(T-t)}.$$

Poiché $B(t) = B(T) e^{-\delta(T-t)}$, si ottiene:

$$V(t) = B(t) - K e^{-\delta(T-t)}.$$

In t_0 , il valore del contratto forward deve essere nullo, poiché in condizioni di assenza di arbitraggio non sono ammessi guadagni immediati:

$$V(t_0) = B(t_0) - K e^{-\delta(T-t_0)} = 0.$$

Da quest'ultima relazione si ricava immediatamente la (9.5).

Come già osservato, il prezzo di un future differisce da quello di un contratto forward con le stesse caratteristiche. Tale differenza è dovuta al mark-to-market e alla conseguente dipendenza dei flussi di cassa dalle fluttuazioni stocastiche della struttura dei tassi d'interesse.

Esempio 9.2. Verificare che il tasso future sull'EURIBOR a tre mesi è coerente con la formula del **cash-and-carry**.

In data odierna, il future sull'EURIBOR a tre mesi con consegna tra un mese è quotato a 96.51. Il tasso future implicito è quindi pari a $l_K = 100 - 96.51 = 3.486\%$.

Un'operazione finanziaria spot a quattro mesi, dopo un mese, avrà vita residua pari a tre mesi. Si indichi con $B(0)$ il prezzo, per ogni euro di nominale, di tale deposito. I tassi EURIBOR correnti (base 360, valuta 2 giorni) sono:

$$l(0, 1) = 0.03821, \quad l(0, 4) = 0.03578.$$

Le corrispondenti intensità istantanee equivalenti sono:

$$\delta(0, 1) = \ln \left(1 + 0.03821 \times \frac{30}{360} \right) = 0.0031791,$$

$$\delta(0, 4) = \ln \left(1 + 0.03578 \times \frac{120}{360} \right) = 0.0118561.$$

Il prezzo del deposito a quattro mesi risulta quindi:

$$B(0) = e^{-\delta(0,4)} = 0.9882139.$$

Applicando la relazione di **cash-and-carry**, il prezzo forward (future) a un mese è dato da:

$$F(0, 1) = B(0) e^{\delta(0,1)} = 0.9882139 \times e^{0.0031791} = 0.9913605.$$

Il tasso implicito nel prezzo $F(0, 1)$ si ottiene da:

$$l_K = 100 \times \left[\left(\frac{1}{0.9913605} - 1 \right) \frac{360}{90} \right] = 3.4859\%.$$

La quotazione teorica del future risulta quindi:

$$F(0, 1) = 100 - l_K = 96.5141,$$

in ottimo accordo con la quotazione osservata (96.51).

Poiché i periodi di riferimento sono molto brevi, è possibile utilizzare il **modello lineare** come approssimazione del tasso future:

$$\begin{aligned}
 l_K &= 100 \times \left[\frac{1 + l(0,4) \frac{120}{360}}{1 + l(0,1) \frac{30}{360}} - 1 \right] \frac{360}{90} \\
 &= 100 \times \left[\frac{1 + 0.03578 \times \frac{120}{360}}{1 + 0.03821 \times \frac{30}{360}} - 1 \right] \frac{360}{90} = 3.4859\%.
 \end{aligned}$$

Il risultato conferma la coerenza del tasso future con la relazione di **non-arbitraggio** implicita nella formula di cash-and-carry. ■

Esempio 9.3. *Verificare se è possibile realizzare un profitto di arbitraggio e rappresentare, mediante una tabella di payoff, la sequenza delle operazioni necessarie alla realizzazione della strategia.*

Si consideri un future sul BTP a 10 anni con consegna fra due mesi la cui quotazione è $F(0, 2/12) = 114$. Il prezzo spot del BTP a 10 anni è pari a 113 e il tasso privo di rischio per posizioni debitorie a due mesi è $i(0, 2/12) = 2.0\%$ su base annua.

Applicando la formula cash-and-carry (9.5), il prezzo teorico del future è:

$$F^*(0, 2/12) = 113 e^{0.02 \times \frac{2}{12}} = 113.377.$$

Il prezzo di mercato del future, $F(0, 2/12) = 114$, risulta superiore al prezzo teorico $F^*(0, 2/12)$, consentendo un guadagno di arbitraggio pari a:

$$F(0, 2/12) - F^*(0, 2/12) = 114 - 113.377 = 0.623.$$

La strategia di *cash-and-carry* consiste nel vendere il future sopravvalutato e acquistare contestualmente il titolo sottostante, finanziandosi al tasso privo di rischio. Alla consegna, l'arbitraggista venderà il BTP e incasserà il payoff del future^a, chiudendo l'operazione con un profitto certo.

Operazione	$t = 0$	$T = 2/12$
Vendita del future su BTP a 10 anni		
(consegna in $T = 2/12$)	–	$114 - B(2/12, 10Y)$
Acquisto del BTP a 10 anni	–113	$B(2/12, 10Y)$
Prestito per finanziare l'acquisto del BTP		
al tasso $i(0, 2/12) = 0.02$	+113	$-113 e^{0.02 \times \frac{2}{12}} = -113.377$
Payoff complessivo	–	$114 - 113.377 = 0.623$

Tabella 9.3: *Flussi temporali della strategia di arbitraggio cash-and-carry sul future BTP decennale*

Il profitto di arbitraggio ammonta quindi a **0.623 euro per ogni unità nominale** del contratto, indipendentemente dall'andamento futuro dei tassi o del prezzo del BTP. La condizione di non-arbitraggio impone che, in equilibrio, il prezzo del future converga a $F^*(0, 2/12)$, eliminando ogni opportunità di profitto certo. ■

^aIn realtà, il payoff è ricevuto giornalmente tramite il mark-to-market

La formula del prezzo dei future è detta *cash-and-carry* perché deriva da una strategia di arbitraggio che consiste nell'acquistare oggi il sottostante sul mercato spot finanziandosi al tasso privo di rischio (*cash*), detenerlo fino alla scadenza del contratto (*carry*) e, simultaneamente, vendere un future con la stessa scadenza. In assenza di opportunità di arbitraggio, il prezzo del future deve riflettere il costo di finanziamento e gli eventuali costi o benefici associati al possesso del sottostante. In forma generale si ha

$$F(t, T) = S(t)e^{(r+c-q)(T-t)},$$

dove r rappresenta il tasso privo di rischio, c eventuali costi di detenzione e q eventuali benefici (dividendi, cedole o altri proventi) derivanti dal possesso del bene. Questa relazione vale per qualunque sottostante, sia esso un'attività finanziaria sia una merce fisica (ad esempio grano, petrolio o oro). Nel caso dei *commodity futures*, i costi di detenzione — quali spese di

magazzinaggio, assicurazione e stoccaggio — incidono direttamente sulla strategia di arbitraggio e contribuiscono alla determinazione del prezzo teorico del contratto.

9.4 Hedging con futures sui tassi a breve termine

Come più volte evidenziato, l'obiettivo di una strategia di *hedging* consiste nel proteggere il valore corrente o futuro di una posizione finanziaria da movimenti avversi dei tassi d'interesse o dei prezzi di mercato. L'operatore che implementa una strategia di copertura interviene in modo da compensare la variazione di valore della posizione principale con una variazione di segno opposto nella posizione di copertura.

Il meccanismo di hedging è analogo a quello descritto nella Sezione 8.4. Un incremento dei tassi d'interesse genera una perdita sul valore di una posizione lunga; per neutralizzare tale effetto, l'operatore dovrà vendere allo scoperto un adeguato numero di futures, in quanto la posizione corta trae beneficio dalla riduzione dei prezzi. In maniera simmetrica, la copertura di una posizione corta si ottiene acquistando futures, così da trarre vantaggio da eventuali diminuzioni dei tassi e conseguenti aumenti dei prezzi.

Indicando con ΔF la variazione del prezzo del future e con ΔV la variazione del valore della posizione da coprire, l'**hedge ratio** è definito dalla relazione:

$$\Delta V = \alpha \Delta F, \quad (9.6)$$

da cui si ricava:

$$\alpha = \frac{\Delta V}{\Delta F}. \quad (9.7)$$

Com'è noto, la variazione del valore della posizione da coprire può essere approssimata mediante la *modified duration* del titolo sottostante:

$$\Delta V = -V \times MD(0, V) \times \Delta i,$$

dove Δi rappresenta la variazione del tasso d'interesse.

In modo analogo, la variazione assoluta del prezzo di un future dipende dall'andamento del sottostante. Nel caso di un future sui tassi a breve, la sua *modified duration* misura la sensibilità rispetto alla volatilità del tasso

di riferimento (ad esempio, l'EURIBOR a tre mesi). Indicando con $MD(0, L)$ la modified duration di un deposito EURIBOR a tre mesi, si ottiene:

$$\Delta F = -F \times MD(0, L) \times \Delta i.$$

Sostituendo le due relazioni nella (9.7), si ricava l'espressione dell'**hedge ratio**:

$$\alpha = \frac{V}{F} \times \frac{MD(0, V)}{MD(0, L)}. \quad (9.8)$$

La formula (9.8) indica il valore della posizione in futures necessaria per neutralizzare, in prima approssimazione, la variazione di valore di un euro della posizione principale dovuta a una modifica marginale dei tassi d'interesse.

Esempio 9.4. *Si determini la strategia di hedging necessaria a ridurre l'esposizione dell'investimento alle variazioni dei tassi d'interesse.*

Nel mese di giugno, la John Hull S.r.l. prevede di ricevere tra tre mesi un pagamento di €10,000,000, che sarà investito in un deposito a sei mesi remunerato al tasso EURIBOR + 40 bp. Il tasso EURIBOR a sei mesi corrente è $l(0, 6) = 4.446\%$. Poiché la direzione finanziaria si attende una riduzione dei tassi, si decide di coprire parzialmente il rischio di minore rendimento tramite futures sull'EURIBOR a tre mesi.

Una diminuzione dei tassi comporta un aumento del prezzo del deposito. Se il tasso restasse invariato al 4.446%, per ogni euro investito il prezzo sarebbe:

$$(1 + 0.04446 + 0.004)^{-0.5} = 0.9766165.$$

In caso di riduzione di 80 bp, il prezzo salirebbe a:

$$(1 + 0.04446 - 0.004)^{-0.5} = 0.9803639.$$

Per compensare il minor rendimento atteso, è opportuno assumere una posizione **long** in futures, che beneficia dell'aumento dei prezzi associato alla riduzione dei tassi.

Le quotazioni correnti dei futures sull'EURIBOR sono riportate nella Tabella 9.4.

Scadenza	Apertura	Chiusura	Chiusura prec.
Giugno	95.53	95.53	95.54
Luglio	95.60	95.61	95.62
Agosto	–	95.67	95.69

Tabella 9.4: Quotazioni dei futures sull'EURIBOR.

Poiché non sono quotati futures con consegna successiva ad agosto, la copertura dovrà essere realizzata acquistando contratti con scadenza anteriore a settembre e rinnovata in seguito. Questa tecnica, nota come **rolling-the-hedge-forward**, consiste nel chiudere i contratti prossimi alla scadenza e riaprirli su scadenze successive.

Il numero di contratti necessari è determinato dalla relazione:

$$\alpha = \frac{V}{F} \frac{MD(0, V)}{MD(0, L)}.$$

La *modified duration* del deposito EURIBOR a tre mesi è:

$$MD(0, L) = \frac{0.25}{1 + 0.04531} = 0.2391635,$$

dove $i(0, 0.25) = 0.04531$.

Per il deposito a sei mesi si ha:

$$MD(0, E6) = \frac{0.5}{1 + 0.04446} = 0.4787163,$$

e il prezzo attuale del deposito è:

$$B(0, 0.5) = (1 + 0.04446)^{-0.5} = 0.9784848.$$

Applicando la formula dell'hedge ratio:

$$\alpha = \frac{0.9784848}{0.956} \frac{0.4787163}{0.2391635} = 2.0487 \approx 2.$$

Per ogni euro di capitale investito nel deposito a sei mesi occorre assumere una posizione long di €2 in future sull'EURIBOR a tre mesi. Il valore nozionale complessivo dei contratti da acquistare è:

$$10,000,000 \times 2 = \text{€}20,000,000,$$

pari a 20 futures.

In forma più generale, il numero di futures da assumere è dato da:

$$n = \frac{FV_V}{FV_L} \frac{D(0, V)}{D(0, L)}, \quad (9.9)$$

dove FV_V e FV_L sono, rispettivamente, il valore facciale della posizione da coprire e quello di un singolo future.

Alla data di vendita (luglio), le nuove quotazioni dei futures sono riportate nella Tabella 9.5.

Scadenza	Apertura	Chiusura	Chiusura prec.
Luglio	95.63	95.63	95.62
Agosto	–	95.73	95.70
Settembre	95.75	95.79	95.75

Tabella 9.5: Quotazioni dei future sull'EURIBOR alla data di rolling.

La vendita dei 20 futures a 95.63 genera un profitto per la posizione long. Il numero di tick maturato è:

$$\eta(0, 0.088) = \frac{0.9563 - 0.9560}{0.000025} = 12,$$

e il flusso mark-to-market:

$$MTM(0, 0.088) = 12 \times 20 \times \text{€}6.25 = \text{€}1,500.$$

Dopo la chiusura della posizione nel mese di luglio, vengono acquistati 20 contratti con consegna settembre. Alla chiusura (settembre), con $F = 95.82$, si ha:

$$\eta(0, 0.164) = \frac{0.9582 - 0.9575}{0.000025} = 28,$$

$$MTM(0, 0.164) = 28 \times 20 \times \text{€}6.25 = \text{€}3,500.$$

Il profitto complessivo derivante dalle due operazioni è:

$$1,500 + 3,500 = \text{€}5,000.$$

Il valore finale dell'investimento, incluso il guadagno da future, è:

$$V(0.5) = \text{€}10,000,000 \times [1 + (0.04123 + 0.0004) \times 0.5] + \text{€}5,000 = \text{€}10,231,150.$$

Il rendimento per il periodo di sei mesi risulta:

$$hpr(0, 0.5) = \frac{\text{€}10,231,150 - \text{€}10,000,000}{\text{€}10,000,000} \times \frac{360}{180} = 0.04623.$$

La strategia di copertura ha ridotto l'impatto della flessione dei tassi sul rendimento complessivo. Il rendimento effettivo (4.623%) risulta superiore di circa 10 bp rispetto al tasso del deposito iniziale (4.523%). È importante sottolineare che lo scopo dell'hedging non è massimizzare il profitto, bensì stabilizzare il valore dell'investimento rispetto alle variazioni dei tassi. ■

9.5 Hedging con futures sui tassi a lungo termine

Le strategie di copertura sui tassi a lungo termine non differiscono sostanzialmente da quelle illustrate per i tassi a breve. Nelle seguenti pagine si analizzeranno le peculiarità dei futures sui tassi a lungo e le modifiche da introdurre nella relazione per il calcolo dell'*hedge ratio*.

9.5.1 Fattore di conversione

Come indicato nelle specifiche contrattuali del future sul Bund a 10 anni (si veda la Figura 9.3), una posizione *short* in tale contratto obbliga il venditore a consegnare €100,000 di valore nominale di un Bund con cedola annua pari al 6%. Di norma, un titolo con queste caratteristiche è raramente disponibile sul mercato, in particolare per quanto riguarda la cedola. In pratica, il venditore può scegliere il titolo da consegnare all'interno di un

insieme di obbligazioni con vita residua compresa tra 8 anni e mezzo e 10 anni e mezzo.

Per rendere omogenei i titoli consegnabili e neutralizzare le differenze dovute a cedole e scadenze diverse, l'Eurex — come tutti i mercati regolamentati dei futures — definisce un **fattore di conversione** (**conversion factor**, CF), che consente di ricondurre qualsiasi titolo consegnabile al titolo standard specificato nel future.

Il fattore di conversione rappresenta il valore attuale delle cedole e del valore nominale di un titolo consegnabile, calcolato al tasso cedolare di riferimento previsto dal future. Quando tale tasso coincide con quello del titolo considerato, il prezzo del titolo è pari al valore nominale e, di conseguenza, il fattore di conversione risulta unitario. In altri termini, se la cedola del titolo coincide con quella del titolo standard definito dal contratto, non è necessaria alcuna correzione.

Per ogni euro di valore nominale, l'importo monetario che il venditore del future riceverà alla data di consegna è dato da:

$$V(T) = EDSP \times CF + R(f), \quad (9.10)$$

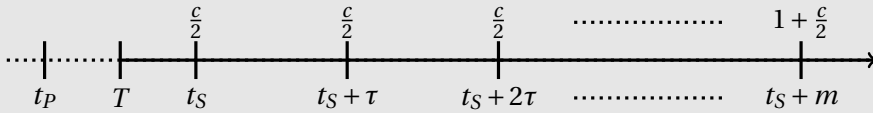
dove:

- $EDSP$ è l'**Exchange Delivery Settlement Price**, ossia il prezzo di regolamento fissato dalla *clearing house* alla data di consegna;
- CF è il fattore di conversione;
- $R(f)$ è il rateo interessi maturato sul titolo consegnato.

Esempio 9.5. Si determini il fattore di conversione per un Bund con scadenza pari a 9 anni e 3 mesi e cedola annua $c = 6.5\%$, assumendo che il future preveda un titolo standard con cedola del 6%.

Il titolo selezionato per la consegna ha una vita residua di 9 anni e 3 mesi, pari a $9 \times 12 + 3 = 111$ mesi. Il numero di cedole complete che saranno pagate fino alla scadenza è $m = 18$ (quoziente di $111/6$), mentre la prossima cedola sarà corrisposta fra tre mesi (resto di $111/6$).

La rappresentazione temporale del flusso cedolare è riportata schematicamente di seguito:



dove:

- T indica la data di consegna del titolo sottostante,
- t_P la data dell'ultima cedola pagata,
- t_S la data della prima cedola successiva alla consegna.

Il fattore di conversione è definito come:

$$CF = (1 + y_s)^{-\frac{t_S - T}{t_S - t_P}} \left[\frac{c}{2} + \frac{c}{2} \left(\frac{1 - (1 + y_s)^{-m}}{y_s} \right) + (1 + y_s)^{-m} \right] - \frac{c}{2} \left(\frac{T - t_P}{t_S - t_P} \right),$$

dove y_s è il tasso cedolare semestrale del titolo standard specificato nel future. Per i futures sui Bund e BTP vale $y_s = 0.06/2 = 0.03$.

Assumendo $t_S - t_P = 180$ e $t_S - T = T - t_P = 90$, si ottiene:

$$CF = (1 + 0.03)^{-0.5} \left[0.0325 + 0.0325 \times \frac{1 - (1 + 0.03)^{-18}}{0.03} + (1 + 0.03)^{-18} \right] - 0.0325 \times 0.5 = 1.034981827.$$

Il fattore di conversione risulta maggiore di uno, poiché il titolo consegnato presenta una cedola superiore al 6% del titolo standard.

Assumendo che l' $EDSP = 0.9846$, l'importo che il venditore del future riceverà per ogni euro di valore nominale è:

$$V(T) = 0.9846 \times 1.034981827 + 0.01625 = 1.035293107,$$

pari a un controvalore complessivo di

$$€100,000 \times 1.035293107 = €103,529.31.$$

Verifica facoltativa

Si verifichi che, per un titolo con scadenza 9 anni e 7 mesi, cedola $c = 5\%$, il fattore di conversione risulta $CF = 0.927862421$. ■

Nella Tabella 9.6 sono riportati i fattori di conversione per il future sul BTP con consegna dicembre 2025.

Contract	ISIN	Coupon	Maturity	Conversion Factor
FBTP SI 20251208 PS	IT0005648149	3.60	01.10.2035	0.829651
FBTP SI 20251208 PS	IT0005631590	3.65	01.08.2035	0.835413
FBTP SI 20251208 PS	IT0005607970	3.85	01.02.2035	0.855831
FBTP SI 20251208 PS	IT0005358806	3.35	01.03.2035	0.819727
FBTP SI 20251208 PS	IT0005584856	3.85	01.07.2034	0.862733
FBTP SI 20251208 PS	IT0005402117	1.45	01.03.2036	0.661025

Tabella 9.6: *Fattori di conversione relativi a futures sul BTP decennale.*

9.5.2 Il cheapest-to-delivery

L'investitore che detiene una *short position* in un future ha la facoltà di scegliere, al momento della consegna, tra diversi titoli a lungo termine idonei a soddisfare gli obblighi contrattuali.

In ogni istante precedente alla consegna ($t \leq T$), il valore della posizione *short* è pari a:

$$V(t, T) = F(t, T) \times CF + R(f),$$

dove $F(t, T)$ è il prezzo del future, CF il fattore di conversione e $R(f)$ il rateo interessi maturato.

Il costo di acquisto del titolo sottostante, al prezzo spot $B(t)$, è invece:

$$V(t) = B(t) + R(f).$$

Il rendimento netto derivante dalla consegna del titolo è quindi dato da:

$$F(t, T) \times CF - B(t). \quad (9.11)$$

La parte *short* sceglierà il titolo che massimizza la relazione (9.11), ossia quello che comporta il minor costo effettivo di consegna. Tale titolo è denominato **cheapest-to-delivery (CTD)**.

È importante osservare che l'identità del titolo CTD può variare nel tempo: in ogni istante $t < t' \leq T$, l'evoluzione della struttura dei tassi può modificare quale titolo risulti più conveniente per la consegna. In genere, se la parte finale della curva dei rendimenti è sufficientemente piatta e posizionata su livelli superiori al 6%, il titolo CTD tende a essere quello con cedola più bassa. Al contrario, in presenza di una struttura più ripida o a tassi inferiori al 6%, il titolo CTD sarà tipicamente quello con cedola più elevata.

9.5.3 Hedge ratio e cheapest-to-delivery

Il concetto di CTD riveste un ruolo cruciale nella determinazione dell'*hedge ratio*. Infatti, il titolo effettivamente consegnato in un future sarà proprio il CTD, e pertanto il prezzo del future rifletterà il valore di questo titolo specifico. Nei future sui tassi a breve, invece, il sottostante è ben definito (ad esempio, il tasso EURIBOR a tre mesi).

Poiché il prezzo del future è strettamente correlato al prezzo spot del CTD, la variazione assoluta del prezzo del future può essere espressa come:

$$F \times CF_{\text{CTD}} \times MD(0, F) = \bar{V}_{\text{CTD}} \times MD(0, \bar{V}_{\text{CTD}}), \quad (9.12)$$

dove $MD(0, \cdot)$ indica la *modified duration*.

Se $\bar{V}$ rappresenta il valore del titolo da coprire, la relazione per l'*hedge ratio* è:

$$\alpha = \frac{\bar{V}}{F} \times \frac{MD(0, \bar{V})}{MD(0, F)}. \quad (9.13)$$

Dalla (9.12) si ricava che:

$$F \times MD(0, F) = \frac{\bar{V}_{\text{CTD}} \times MD(0, \bar{V}_{\text{CTD}})}{CF_{\text{CTD}}}.$$

Sostituendo tale espressione nella (9.13), si ottiene:

$$\alpha = \frac{\bar{V}}{\bar{V}_{\text{CTD}}} \times \frac{MD(0, \bar{V})}{MD(0, \bar{V}_{\text{CTD}})} \times CF_{\text{CTD}}. \quad (9.14)$$

Nella pratica operativa, gli operatori preferiscono spesso utilizzare la **dollar duration** (o **basis point value**, *BPV*) per esprimere la sensibilità ai tassi. In tal caso, l'*hedge ratio* può essere riscritto come:

$$\alpha = \frac{BPV(0, \bar{V})}{BPV(0, \bar{V}_{\text{CTD}})} \times CF_{\text{CTD}}, \quad (9.15)$$

dove $BPV(\cdot, \cdot)$ rappresenta la variazione del prezzo del titolo per uno spostamento di un punto base del tasso di interesse.

Come illustrato nell'Esempio 5.2, modificando la duration di un portafoglio è possibile trarre vantaggio dalle variazioni attese della struttura dei tassi. L'acquisto o la vendita di futures consente di modificare la duration complessiva senza dover intervenire direttamente sui titoli in portafoglio, evitando così costi di transazione elevati. Ad esempio, se gli analisti prevedono una riduzione dei tassi (ovvero uno *shift* verso il basso della curva), acquistando future si può aumentare la duration del portafoglio e beneficiare dell'aumento dei prezzi dei titoli.

Sia $BPV(0, \bar{\Pi}^T)$ il valore obiettivo della basis point volatility del portafoglio. Acquistando un certo ammontare nominale di future è possibile adeguarne la sensibilità complessiva fino a raggiungere tale obiettivo:

$$BPV(0, \bar{\Pi}^T) = BPV(0, \bar{\Pi}) + \gamma BPV(0, F),$$

dove $BPV(0, F)$ è la basis point volatility del future (si veda la relazione (9.12)). Ne consegue che il valore facciale di future da acquistare per ogni euro di portafoglio è:

$$\gamma = \frac{BPV(0, \bar{\Pi}^T) - BPV(0, \bar{\Pi})}{BPV(0, F)}. \quad (9.16)$$

Poiché dalla (9.12) risulta:

$$BPV(0, F) = \frac{BPV(0, \bar{V}_{CTD})}{CF_{CTD}},$$

sostituendo nella (9.16) si ottiene la forma finale:

$$\gamma = \frac{BPV(0, \bar{\Pi}^T) - BPV(0, \bar{\Pi})}{BPV(0, \bar{V}_{CTD})} \times CF_{CTD}. \quad (9.17)$$

Esempio 9.6. Si determini la strategia di copertura di un portafoglio obbligazionario tramite futures sul Bund, al fine di ridurre l'esposizione a variazioni avverse dei tassi d'interesse.

Un gestore di fondi obbligazionari teme un possibile rialzo dei tassi, che comporterebbe una diminuzione del valore di mercato del portafoglio. Per limitare tale rischio, egli decide di implementare una strategia di hedging utilizzando futures sul Bund.

Poiché un rialzo dei tassi comporta una diminuzione del valore del portafoglio obbligazionario, la copertura deve generare un guadagno nello stesso scenario. Per ottenere questo risultato, è necessario assumere una **posizione corta** in futures, in modo da compensare la perdita registrata sulla posizione lunga del portafoglio con il profitto realizzato dalla posizione corta in futures.

Il valore nominale complessivo del portafoglio è pari a € 100,000,000, con una basis point volatility pari a

$$BPV(0, \bar{\Pi}) = 5.82.$$

Il valore nominale di un future sul Bund è di € 100,000; la *basis point volatility* del titolo CTD è

$$BPV(0, \tilde{V}_{CTD}) = 5.19,$$

mentre il fattore di conversione corrispondente risulta

$$CF_{CTD} = 1.2237128.$$

L'*hedge ratio* per unità di valore nominale del portafoglio è dato da:

$$\alpha = \frac{BPV(0, \bar{\Pi})}{BPV(0, \tilde{V}_{CTD})} \times CF_{CTD} = \frac{5.82}{5.19} \times 1.2237128 = 1.3723.$$

Pertanto, per ogni euro di valore nominale del portafoglio è necessario vendere allo scoperto 1.3723 euro di valore nominale in futures.

Il numero complessivo di contratti da vendere è:

$$\eta_f = \frac{€ 100,000,000}{€ 100,000} \times 1.3723 = 1,372.3 \approx 1,372.$$

Il gestore dovrà quindi aprire una **posizione corta su 1,372 Bund futures** per ottenere una copertura efficace del portafoglio obbligazionario. ■

Esempio 9.7. *Determinare la strategia di hedging più appropriata, mediante future sui tassi a lungo, per ridurre l'esposizione del portafoglio alle variazioni dei tassi d'interesse.*

Il fondo obbligazionario della Polifemo SGR ha un valore nominale

pari a €12,800,000. Il portafoglio è composto da tre titoli di Stato italiani a medio-lungo termine. Le principali caratteristiche sono riportate nella Tabella 9.7.^a

	IT0005521981	IT0005595803	IT0005607970	Totale
Scadenza	01/04/2028	15/07/2031	01/02/2035	–
Nominale (€)	2,600,000	3,700,000	6,500,000	12,800,000
Cedola (%)	3.40	3.45	3.85	–
Rendimento (%)	2.38	2.91	3.41	–
Rateo	0.008081967	0.01553453	0.015527624	–
Prezzo	1.0302	1.0300	1.0368	–
Valore di mercato (€)	2,699,533.11	3,868,477.76	6,840,129.56	13,408,140.44
Pesi	0.2013	0.2885	0.5101	1
Modified duration	2.73	5.25	8.22	–
BPV	2.8345	5.4891	8.6501	6.5672

Tabella 9.7: *Composizione del portafoglio obbligazionario e misure di rischio*

Gli analisti non ritengono certo un rialzo dei tassi; preferiscono dunque ridurre la duration del portafoglio, anziché coprirsi integralmente. Una duration più contenuta riduce la volatilità del valore di mercato del fondo. La basis point volatility attuale è:

$$BPV(0, \bar{\Pi}) = 2.8345 \times 0.2013 + 5.4891 \times 0.2885 + 8.6501 \times 0.5101 = 6.5672.$$

Il gestore decide di ridurre la BPV a un valore target pari a 4. Poiché un aumento dei tassi ridurrebbe il valore del portafoglio, la copertura sarà implementata tramite una posizione short in future sul Bund.

Gli analisti prevedono che il CTD del contratto dicembre sia il Bund DE000BU3Z047, avente:

$$CF_{CTD} = 0.7581, \quad BPV(0, \bar{V}_{CTD}) = 8.80398.$$

Il valore nominale di future da vendere per ogni euro di valore facciale del portafoglio è quindi:

$$\gamma = \frac{4 - 6.5672}{8.80398} \times 0.7581 = -0.22106.$$

Il numero di futures risulta:

$$n_f = \frac{€12,800,000}{€100,000} \times 0.22106 = 28.2957 \approx 28.$$

Il prezzo del future sul Bund (consegna dicembre) quotato all'EUREX in data 27/06/2025 è:

$$F(27/06/2025, 17/12/2025) = 130.56.$$

A ottobre, la fase di instabilità appare conclusa e si decide di chiudere l'hedge acquistando 28 future sul Bund allo stesso contratto, al prezzo:

$$F(27/10/2025, 17/12/2025) = 129.51.$$

La riduzione del prezzo genera un profitto per la posizione short. Il numero di tick è:

$$\eta(27/06, 27/10) = \frac{1.2951 - 1.3056}{0.0001} = -105.$$

Dato che ogni tick vale €10, il flusso mark-to-market è:

$$MTM = 105 \times 28 \times €10 = €29,400.$$

Il valore del portafoglio si riduce di circa €7,000 (variazione pari allo 0.0523%), mentre il profitto dalla posizione in futures (€29,400) copre integralmente la perdita, generando un guadagno netto pari a €22,381.21.

^aValori di mercato e volatilità aggiornati al 27/06/2025. Fonte: <https://www.eurex.com/ex-en/data/clearing-files/notified-deliverable-bonds-conversion-factors>.

L'analisi condotta in questo capitolo si fonda sull'ipotesi che la struttura a termine dei tassi d'interesse si modifichi attraverso *shift paralleli*, ossia variazioni uniformi lungo tutte le scadenze. Tale assunzione consente di utilizzare misure aggregate come la modified duration per stimare in modo lineare la sensibilità del valore di un portafoglio alle variazioni dei tassi.

Nella pratica di mercato, tuttavia, questa ipotesi non è sempre soddisfatta. La struttura a termine evolve in modo eterogeneo, presentando movimenti di *steepening* o *flattening*, variazioni localizzate su specifici segmenti della curva (*butterfly movements*) o rotazioni attorno a particolari orizzonti temporali. Questi cambiamenti non paralleli possono alterare in maniera significativa l'efficacia delle strategie di hedging basate

esclusivamente sulle misure di primo ordine, riducendone la capacità di protezione in presenza di distorsioni della curva non uniformi.

Per ottenere una copertura più accurata, soprattutto su portafogli con esposizioni distribuite su scadenze molto diverse, può essere necessario ricorrere a modelli di sensibilità più articolati — come le *key rate durations*, le *bucket DV01* o gli approcci multifattoriali — che consentono di isolare gli effetti delle variazioni della curva sui diversi punti nodali. Questi strumenti permettono di costruire strategie di hedging più robuste, in grado di gestire movimenti non lineari e non paralleli della struttura, e riflettono in modo più realistico il comportamento delle curve osservate sui mercati obbligazionari.

Approfondimenti

Dimostriamo che l'uguaglianza tra prezzi forward e prezzi future si verifica esclusivamente nel caso — peraltro del tutto irrealistico — in cui la struttura a termine evolva in modo deterministico. In tale contesto, infatti, valgono relazioni di coerenza intertemporale molto stringenti che eliminano l'effetto del *mark-to-market*, responsabile delle differenze fra i due strumenti.

Nel caso di evoluzione deterministica della struttura, per ogni coppia di scadenze $T \leq s$ si ha:

$$B(T, s) = \frac{B(t, s)}{B(t, T)}. \quad (9.18)$$

Poiché $M(t, s) = 1/B(t, s)$ e $M(t, T) = 1/B(t, T)$, dalla (9.18) segue immediatamente:

$$M(t, s) = M(t, T) M(T, s).$$

Consideriamo ora tre istanti temporali $t \leq t_1 \leq T$ e assumiamo che la struttura evolva in modo deterministico, da cui:

$$M(t, T) = M(t, t_1) M(t_1, T).$$

Supponiamo che sul mercato siano negoziati contratti forward e future sul medesimo sottostante, e che il flusso di *mark-to-market* dei future venga incassato o pagato al tempo t_1 . Sia allora implementata la seguente strategia:

1. Vendita allo scoperto in t di n contratti forward con consegna in T al prezzo $f(t, T)$, con $n = M(t, T)$.
2. Acquisto in t di m futures con consegna in T al prezzo $F(t, T)$, con $m = M(t, t_1)$.
3. Acquisto in t_1 di h futures con consegna in T al prezzo $F(t_1, T)$, con $h = m [M(t_1, T) - 1]$.

Al tempo t_1 il flusso di *mark-to-market* è pari a:

$$m [F(t_1, T) - F(t, T)].$$

Indichiamo con $B(T)$ il valore spot del sottostante alla consegna. Il payoff delle tre posizioni al tempo T risulta:

1. Forward short:

$$\mathcal{A}(T) = -n [B(T) - f(t, T)] = -M(t, T) [B(T) - f(t, T)].$$

2. Future long aperto in t :

$$\mathcal{B}(T) = m [B(T) - F(t, T)] + h [B(T) - F(t_1, T)] = M(t, t_1) M(t_1, T) [B(T) - F(t_1, T)].$$

3. Valore al tempo T del flusso di *mark-to-market*:

$$\mathcal{C}(T) = \{m[F(t_1, T) - F(t, T)]\} M(t_1, T) = M(t, t_1) M(t_1, T) [F(t_1, T) - F(t, T)].$$

La somma dei tre payoff è quindi:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(T) + \mathcal{B}(T) + \mathcal{C}(T) &= -M(t, T) [B(T) - f(t, T)] + \\ &\quad + M(t, t_1) M(t_1, T) [B(T) - F(t_1, T)] + \\ &\quad + M(t, t_1) M(t_1, T) [F(t_1, T) - F(t, T)]. \end{aligned} \quad (9.19)$$

Usando l'identità $M(t, T) = M(t, t_1) M(t_1, T)$, la (9.19) si semplifica in:

$$\mathcal{A}(T) + \mathcal{B}(T) + \mathcal{C}(T) = M(t, T) [f(t, T) - F(t, T)]. \quad (9.20)$$

Il portafoglio complessivo è costituito soltanto da posizioni forward e future, che hanno valore nullo al tempo di stipula. In assenza di opportunità di arbitraggio, anche il valore finale deve essere nullo. Poiché $M(t, T) > 1$, l'unico modo affinché:

$$\mathcal{A}(T) + \mathcal{B}(T) + \mathcal{C}(T) = 0$$

è che:

$$f(t, T) = F(t, T).$$

Ne segue che l'uguaglianza tra prezzo forward e prezzo future si verifica solo sotto evoluzione deterministica della struttura. Poiché nella realtà i tassi seguono un'evoluzione aleatoria continua, l'ipotesi risulta puramente teorica.

In sintesi, dal punto di vista rigoroso la formula *cash-and-carry* non dovrebbe essere utilizzata per valutare un future. Tuttavia, evidenze empiriche mostrano che per scadenze brevi la differenza tra prezzi forward e future è generalmente trascurabile, mentre diventa più significativa per i contratti su materie prime. Per questo motivo, nella prassi didattica e operativa la formula *cash-and-carry* è spesso adottata come valida approssimazione del prezzo future.

Capitolo 10

Swap

10.1 Definizione e struttura

Uno *swap* è un contratto finanziario mediante il quale due controparti si scambiano flussi monetari secondo modalità predefinite. In questo capitolo si esamineranno gli **interest rate swap (IRS)**, ossia contratti in cui i flussi scambiati fanno riferimento a tassi d'interesse denominati nella stessa valuta.

Il tipo di swap più diffuso è il cosiddetto *plain vanilla* IRS. In tale configurazione, la controparte **A** si impegna a pagare alla controparte **B** un flusso periodico calcolato applicando un tasso fisso su un dato nozionale per un orizzonte temporale prestabilito. Simmetricamente, la controparte **B** paga alla controparte **A** un flusso determinato da un tasso variabile, generalmente ancorato a un tasso risk-free, come l'EURIBOR o l'Euro Short-Term Rate (€STR), applicato allo stesso nozionale e per la medesima durata.

Questo scambio di flussi a tasso fisso contro flussi a tasso variabile caratterizza i cosiddetti **fixed/float swap**. Una rappresentazione schematica della struttura dei pagamenti associata a un *plain vanilla* IRS è riportata nella Figura 10.1.

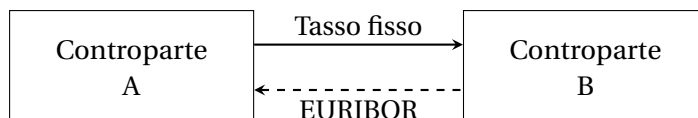


Figura 10.1: Schema dei flussi di un *plain vanilla* IRS.

10.2 Gli swap per la gestione del rischio di tasso

L'impiego principale degli IRS è la gestione del rischio di tasso d'interesse. Gli swap consentono infatti di trasformare in modo efficace, e con costi contenuti, un'esposizione a tasso variabile in una a tasso fisso, o viceversa.

Un debitore esposto a un tasso variabile può desiderare di fissare il costo del debito qualora si attenda un aumento dei tassi di mercato. Analogamente, un investitore che detiene attività remunerate a tasso variabile può subire perdite in caso di riduzione dei tassi: l'integrazione del portafoglio con uno swap permette di convertire il flusso variabile in un flusso fisso, stabilizzando i rendimenti. Strategie speculari vengono adottate quando si ritiene più vantaggioso passare da un tasso fisso a uno variabile.

Nella prassi operativa, le controparti non negoziano direttamente il contratto di swap. La stipula avviene tramite un intermediario finanziario — tipicamente una banca o una primaria istituzione autorizzata — che abbina domanda e offerta delle componenti fissa e variabile dello swap, assumendo il ruolo di controparte centrale per entrambe le parti.

La Figura 10.2 illustra il flusso dei pagamenti nello schema con intermediario.

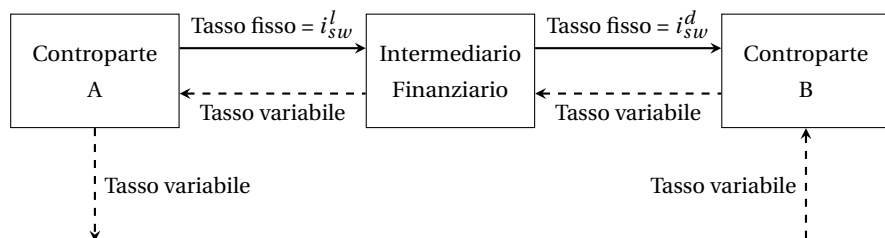


Figura 10.2: Schema dei flussi di un IRS intermediato da una controparte finanziaria.

Esempio 10.1. Si illustri come uno swap possa essere utilizzato per trasformare un debito a tasso variabile in un debito a tasso fisso. Si determinino, inoltre, i flussi scambiati nel primo semestre e si verifichi il tasso netto risultante.

La controparte **A** ha contratto un prestito a tasso variabile indicizzato all'EURIBOR a sei mesi, maggiorato di uno spread di 40bp, su un nozionale pari a €2,500,000 e con durata di cinque anni. Prevedendo un aumento dei tassi di mercato, la controparte desidera stabilizzare il costo del finanziamento trasformando il debito variabile in uno a tasso fisso mediante la stipula di un interest rate swap (IRS).

Dati del contratto swap

In data 01/04/2025 la controparte **A** entra in uno swap con scadenza triennale, pagamenti semestrali, in cui:

- paga un tasso fisso annuo pari a $i_{sw} = 2.22\%$ (convenzione Act/Act),
- riceve il tasso EURIBOR a sei mesi rilevato a ogni reset (convenzione Act/360).

Il primo scambio di flussi avviene in data 01/10/2025. Il tasso EURIBOR a sei mesi osservato alla stipula è $l(0, 0.5) = 2.309\%$ annuo.

Flussi per euro di nozionale

Al tempo t , i flussi generati dal prestito e dallo swap sono:

1. pagamento del tasso variabile del prestito: $l(t-1, t) + 40\text{bp}$;
2. incasso del tasso variabile dello swap: $l(t-1, t)$;
3. pagamento del tasso fisso dello swap: i_{sw} .

La combinazione dei tre flussi produce il seguente tasso netto:

$$i_n(t) = -[l(t-1, t) + 40\text{bp}] + l(t-1, t) - i_{sw} = -(i_{sw} + 40\text{bp}),$$

ossia un tasso fisso pari al tasso swap più lo spread originario del prestito.

Calcolo del primo flusso (01/10/2025)

Assumendo:

$$\frac{\text{Act}}{365} = \frac{184}{365}, \quad \frac{\text{Act}}{360} = \frac{184}{360},$$

il flusso a tasso fisso è:

$$V(1) = \text{€}2,500,000 \times 0.0222 \times \frac{184}{365} = \text{€}27,978.08.$$

Il flusso a tasso variabile ricevuto è:

$$V(1) = \text{€}2,500,000 \times 0.02309 \times \frac{184}{360} = \text{€}29,503.89.$$

Il flusso netto del periodo è:

$$\begin{aligned} V_n(1) &= -\text{€}2,500,000 (0.2309 + 0.0040) \frac{184}{360} + (29,503.89 - 27,978.08) \\ &= \text{€} - 33,089.19. \end{aligned}$$

Il tasso netto annuo è quindi:

$$i_n(1) = \frac{33,089.19}{2,500,000} \times \frac{365}{184} = 0.02626,$$

pari a $i_{sw} + 40\text{bp}$, come previsto.

Osservazioni

La Tabella 10.1 riporta i flussi scambiati nei vari semestri. Si verifichi che il tasso netto rimane costante in ciascun periodo al livello $i_{sw} + 40\text{bp}$.

La strategia di swap consente dunque alla controparte **A** di sostituire il costo incerto associato al tasso variabile con un tasso fisso deterministico. Il meccanismo è del tutto analogo a quello dei contratti FRA: un FRA può essere considerato come uno swap con un solo flusso di regolamento, in cui viene scambiato un tasso fisso $FRA_{T \times s}$ contro un tasso variabile $l(T, s)$. ■

10.3 Swap e credit arbitrage

L'impiego principale degli swap è legato alla gestione del rischio di tasso d'interesse, attraverso la trasformazione di flussi a tasso fisso in flussi a tasso variabile (o viceversa). Accanto a questa funzione di copertura, gli swap possono tuttavia essere utilizzati anche per sfruttare il cosiddetto **credit arbitrage**.

k	t_k	τ_k	EURIBOR	$\mathcal{V}(k)$	V(k)	Flusso Netto
0	01/08/22		0.654%			
1	01/02/23	184	2.732%	€ 8,356.67	€ -27,978.08	€ -19,621.42
2	01/08/23	181	3.929%	€ 34,339.72	€ -27,521.92	€ 6,817.80
3	01/02/24	184	3.861%	€ 50,203.89	€ -27,978.08	€ 22,225.81
4	01/08/24	182	3.444%	€ 48,798.75	€ -27,598.36	€ 21,200.39
5	01/02/25	184	2.536%	€ 44,006.67	€ -27,978.08	€ 16,028.58
6	01/08/25	181		€ 31,876.11	€ -27,521.92	€ 4,354.19

Tabella 10.1: *Flussi originati da un contratto swap plain vanilla fixed/float.*

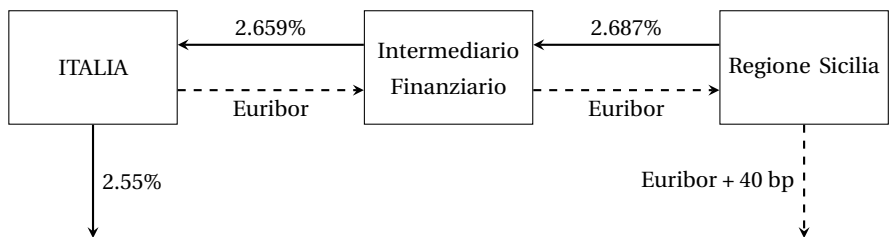


Figura 10.3: *Rappresentazione grafica del flusso originato da uno IRS fra due istituzioni con diverso rating creditizio.*

In molti mercati, alcune istituzioni godono di un vantaggio comparativo nel finanziarsi a tasso fisso rispetto al tasso variabile, mentre per altre vale il contrario: risulta più conveniente emettere debito a tasso variabile piuttosto che fisso.

Attraverso la stipula di uno swap, le controparti possono combinare tali vantaggi comparativi: ciascuna si finanzia nel segmento (fisso o variabile) in cui è relativamente più efficiente e utilizza lo swap per ottenere la struttura di tasso desiderata. In questo modo è possibile ridurre il costo effettivo del finanziamento rispetto a quanto sarebbe ottenibile operando soltanto nel mercato in cui la società è meno competitiva.

In sintesi, oltre alla funzione di copertura, gli swap possono generare benefici di costo sfruttando le differenze nei meriti di credito e nelle condizioni di mercato cui sono soggette le controparti.

Esempio 10.2. *Determinare una strategia di credit arbitrage che consenta a entrambe le controparti di ridurre il costo di finanziamento tramite uno swap su tassi d'interesse.*

Si considerino lo Stato italiano e la Regione Sicilia. Le condizioni di finanziamento a 10 anni sono riportate nella Tabella 10.2.

	Stato italiano	Regione Sicilia	Premio (bp)
Tasso fisso	2.55%	3.29%	74
Tasso variabile	EURIBOR + 5 bp	EURIBOR + 40 bp	35
Differenza			39

Tabella 10.2: *Condizioni di finanziamento a 10 anni*

Dalla Tabella 10.2 si osserva che la Regione Sicilia^a, caratterizzata da una qualità creditizia inferiore rispetto allo Stato italiano, sostiene un premio maggiore in entrambi i mercati di finanziamento. Tuttavia, il differenziale tra i due emittenti è pari a 74 punti base nel mercato a tasso fisso, mentre si riduce a 35 punti base nel mercato a tasso variabile. Ne consegue che lo Stato italiano gode di un vantaggio comparato nel finanziamento a tasso fisso, mentre la Regione Sicilia risulta relativamente meno penalizzata nel mercato a tasso variabile.

La differenza tra i due premi, pari a 39 punti base, rappresenta il **credit spread potenziale**: ricorrendo agli swap è possibile appropriarsi di parte di tale spread per ridurre il costo complessivo del finanziamento. Si osservi che, nel caso numerico riportato di seguito, i risparmi effettivi dipendono anche dal livello del tasso fisso swap negoziato (denaro/lettera) e quindi possono discostarsi dal valore potenziale, pur restando compatibili con la logica del credit arbitrage.

Si assumano i seguenti tassi swap denaro/lettera:

$$i_{sw}^d = 2.659\%, \quad i_{sw}^l = 2.687\%.$$

Il flusso dell'operazione è illustrato nella Figura 10.3.

Stato italiano

Lo Stato italiano si indebita a tasso fisso al 2.55% e utilizza lo swap per trasformare l'esposizione da tasso fisso a tasso variabile. I flussi dell'operazione, per ogni euro di nozionale, sono:

- sul prestito paga il tasso fisso del 2.55%;
- nello swap riceve il tasso fisso in denaro pari al 2.659%;
- nello swap paga il tasso variabile indicizzato $l(t-1, t)$.

Combinando tali flussi, il costo complessivo risulta equivalente a un finanziamento indicizzato pari a $EURIBOR - 10.9 \text{ bp}$. Poiché il finanziamento diretto a tasso variabile avrebbe comportato un costo pari a $EURIBOR + 5 \text{ bp}$, la strategia consente una riduzione del costo pari a 15.9 punti base.

Regione Sicilia

La Regione Sicilia si indebita a tasso variabile al costo $EURIBOR + 40 \text{ bp}$ e utilizza lo swap per trasformare l'esposizione da tasso variabile a tasso fisso. I flussi dell'operazione, per ogni euro di nozionale, sono:

- sul prestito paga il tasso variabile $l(t-1, t) + 40 \text{ bp}$;
- nello swap riceve il tasso variabile $l(t-1, t)$;
- nello swap paga il tasso fisso in lettera pari al 2.687%.

L'effetto complessivo è un finanziamento a tasso fisso pari a 3.087%. Poiché il tasso fisso ottenibile direttamente sul mercato sarebbe stato 3.29%, la strategia consente una riduzione del costo pari a 20.3 punti base.

Conclusioni

L'operazione di credit arbitrage consente a entrambe le controparti di ottenere condizioni migliori rispetto al finanziamento diretto nella forma desiderata:

- lo Stato italiano riduce il costo del finanziamento a tasso variabile di 15.9 punti base;
- la Regione Sicilia riduce il costo del finanziamento a tasso fisso di 20.3 punti base.

In particolare, lo swap consente di sfruttare il vantaggio comparato dello Stato italiano nel mercato a tasso fisso e quello relativo della Regione Sicilia nel mercato a tasso variabile. Il beneficio complessivo è coerente con l'esistenza di un differenziale tra i premi nei due mercati (Tabella 10.2), che rende possibile appropriarsi di parte del credit spread e ridurre il costo del finanziamento. ■

^aRating della Regione Sicilia **BBB**; rating dello Stato italiano **BBB+**. Valutazione dell'Agenzia Fitch del 01/09/2025.

10.4 Valutazione degli swap

Si consideri un operatore che abbia stipulato uno swap in cui riceve un tasso fisso e paga un tasso variabile. Tale posizione può essere interpretata come la combinazione di una posizione **long** in un CBB, la cui cedola fissa coincide con il tasso swap ricevuto, e di una posizione **short** in un FRN, la cui cedola variabile è parametrata al tasso EURIBOR (Figura 10.4).

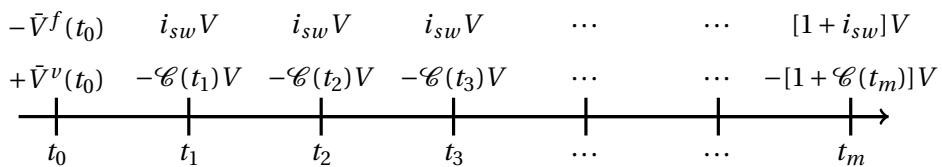


Figura 10.4: Scomposizione di uno swap in una posizione long in un CBB e short in un FRN.

Il valore dello swap è pari alla differenza tra il valore attuale dei flussi della **gamba fissa** e il valore attuale dei flussi della **gamba variabile**. Il segno del valore rispecchia la somma algebrica dei due contributi.

Indicando con $\bar{V}^f(t_0)$ il valore attuale della componente fissa e con $\bar{V}^v(t_0)$ quello della componente variabile, per assenza di arbitraggio si ha:

$$V^{sw}(t_0) = \bar{V}^f(t_0) - \bar{V}^v(t_0). \quad (10.1)$$

Il valore della gamba fissa, dato il profilo dei tassi spot osservato in t_0 , è:

$$\overline{V}^f(t_0) = i_{sw} V \sum_{j=1}^m B(t_0, t_j) + VB(t_0, t_m).$$

La componente variabile, essendo equivalente ad un FRN, ha valore pari al nozionale negli istanti di reset:

$$\overline{V}^v(t_0) = V.$$

Il valore dello swap all'origine è quindi:

$$V^{sw}(t_0) = i_{sw} V \sum_{j=1}^m B(t_0, t_j) + VB(t_0, t_m) - V. \quad (10.2)$$

In un generico istante di pagamento t_k , con $k = 1, \dots, m-1$, il valore dello swap è:

$$V^{sw}(t_k) = i_{sw} V \sum_{j=k+1}^m B(t_k, t_j) + VB(t_k, t_m) - V. \quad (10.3)$$

Alla data di stipula t_0 il valore dello swap deve essere nullo, in quanto nessuna delle due controparti deve sostenere un esborso iniziale. Imponendo quindi

$$V^{sw}(t_0) = 0,$$

si ottiene il **tasso swap di parità**, ossia quel tasso che rende nullo il valore iniziale del contratto. Tale tasso è dato da

$$i_{sw}(t_0, t_m) = \frac{1 - B(t_0, t_m)}{\sum_{j=1}^m B(t_0, t_j)}. \quad (10.4)$$

Il tasso swap dipende unicamente dalla struttura a pronti rilevata in t_0 e dalle scadenze dei flussi fissi. La Tabella 10.4 riporta i tassi swap per diverse scadenze. La notazione usuale specifica durata e frequenza del tasso variabile: ad esempio, 5Y/6M indica durata pari a 5 anni con reset semestrale.

Esempio 10.3. *Determinare il valore di uno swap fixed/float tre anni dopo la stipula.*

Nell'ottobre 2022 il Banco del Capo ha stipulato uno swap della durata di cinque anni con il quale paga un flusso a tasso fisso pari a $i_{sw} = 2.73\%$ e riceve un flusso a tasso variabile indicizzato all'EURIBOR

maggiorato di 20bp, su un nozionale di €10,000,000.

Alla data di valutazione, 03/10/2025, mancano quattro pagamenti alla scadenza dello swap. Si assuma che la struttura dei prezzi spot vigente sia quella riportata nella Tabella 10.3.

τ	0.5	1	1.5	2
$B(0, \tau)$	0.990123	0.979844	0.968510	0.956399

Tabella 10.3: *Struttura dei prezzi spot.*

Dal punto di vista del Banco del Capo, lo swap equivale a una posizione short in un titolo a tasso fisso e a una posizione long in un FRN che paga EURIBOR + 20bp.

Valorizzazione della componente fissa

Il valore attuale dei flussi fissi è dato da

$$\begin{aligned} \overline{V}^f(0) = & \text{€}10,000,000 \left[B(0, 2) + 0.0273 \frac{182}{365} B(0, 0.5) + 0.0273 \frac{182}{365} B(0, 1) + \right. \\ & \left. + 0.0273 \frac{182}{365} B(0, 1.5) + 0.0273 \frac{182}{365} B(0, 2) \right] = \text{€}10,094,184.00. \end{aligned}$$

Valorizzazione della componente variabile

Poiché la valutazione è effettuata immediatamente dopo il pagamento dell'ultimo flusso, il valore della gamba variabile coincide con il nozionale più il valore attuale dello spread (cfr. 3.50):

$$\begin{aligned} \overline{V}^v(0) = & \text{€}10,000,000 \left[1 + 0.002 \frac{182}{360} B(0, 0.5) + 0.002 \frac{182}{360} B(0, 1) + \right. \\ & \left. + 0.002 \frac{182}{360} B(0, 1.5) + 0.002 \frac{182}{360} B(0, 2) \right] = \text{€}10,039,381.52. \end{aligned}$$

Valore dello swap

Il valore netto della posizione del Banco del Capo risulta:

$$V^{sw}(0) = -\overline{V}^f(0) + \overline{V}^v(0) = \text{€} - 54,802.47.^1$$

Si è assunto che tutti i pagamenti siano distanziati di 182 giorni.

10.5 Il bootstrap della curva dei tassi swap

Applicando una procedura ricorsiva analoga al bootstrap dei tassi a pronti illustrato nella Sezione 7.2, è possibile ricavare dalla struttura dei tassi swap la corrispondente curva dei tassi spot.

Si indichi con t l'istante di valutazione e con $i_{sw}(t, t+k)$ il tasso swap per scadenze pari a k anni. La relazione di parità impone che

$$i_{sw}(t, t+k) = \frac{1 - [1 + i(t, t+k)]^{-k}}{\sum_{j=1}^k B(t, t+j)}$$

Con semplici passaggi algebrici si ricava che

$$i_{sw}(t, t+k) \sum_{j=1}^{k-1} B(t, t+j) + i_{sw}(t, t+k) [1 + i(t, t+k)]^{-k} = 1 - [1 + i(t, t+k)]^{-k}.$$

Mettendo in evidenza il fattore di sconto $[1 + i(t, t+k)]^{-k}$, si ottiene

$$[1 + i(t, t+k)]^{-k} [1 + i_{sw}(t, t+k)] = 1 - i_{sw}(t, t+k) \sum_{j=1}^{k-1} B(t, t+j),$$

da cui si ricava facilmente il tasso spot per una o.f. di k anni,

$$i(t, t+k) = \left[\frac{1 + i_{sw}(t, t+k)}{1 - i_{sw}(t, t+k) \sum_{j=1}^{k-1} B(t, t+j)} \right]^{1/k} - 1 \quad (10.5)$$

La formula (10.5) è applicata ricorsivamente partendo dal tasso swap per scadenze pari ad un anno, $i_{sw}(t, t+1)$. In particolare, si dimostra facilmente che $i(t, t+1) = i_{sw}(t, t+1)$.

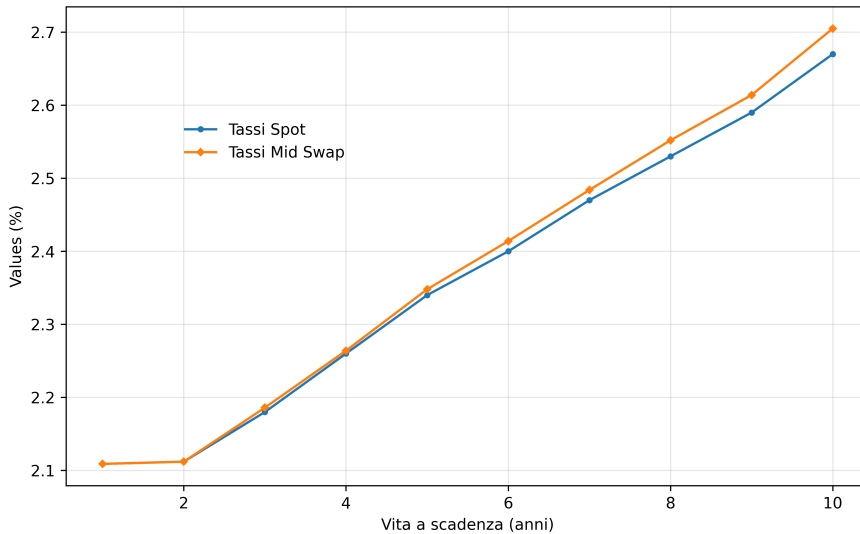


Figura 10.5: Strutture dei tassi swap e spot osservate il 01/09/2025.

Esempio 10.4. Determinare i tassi spot impliciti nei primi tre anni utilizzando la struttura dei tassi swap riportata nella Tabella 10.4.

A partire dai tassi swap annuali, i corrispondenti tassi spot si ottengono applicando la relazione (10.5) ricorsivamente. In particolare, per le prime tre scadenze si ricava:

$$i(0, 1) = 0.02109,$$

$$i(0, 2) = \left(\frac{1 + 0.02112}{1 - 0.02112 \times 0.979346} \right)^{1/2} - 1 = 0.02112,$$

$$i(0, 3) = \left[\frac{1 + 0.02184}{1 - 0.02184 \times (0.979346 + 0.959061)} \right]^{1/3} - 1 = 0.02186.$$

La Figura 10.5 confronta l'evoluzione dei tassi spot e dei tassi swap fino alla scadenza decennale. ■

Scadenza (anni)	Denaro (Bid)	Lettera (Ask)	Tasso Mid
1Y/6M	2.1085	2.1095	2.1090
2Y/6M	2.1105	2.1135	2.1120
3Y/6M	2.1820	2.1860	2.1840
5Y/6M	2.3380	2.3440	2.3410
6Y/6M	2.3990	2.4090	2.4040
7Y/6M	2.4650	2.4750	2.4700
8Y/6M	2.5280	2.5380	2.5330
9Y/6M	2.5860	2.5960	2.5910
10Y/6M	2.6590	2.6870	2.6730
15Y/6M	2.8640	2.8920	2.8780
20Y/6M	2.9300	2.9500	2.9400
25Y/6M	2.9050	2.9250	2.9150
30Y/6M	2.8900	2.9100	2.9000

Tabella 10.4: Tassi di parità Swap EUR (%) – Valori denaro, lettera e mid su base annua per scadenze fino a 30 anni.

Approfondimenti

L'**interest rate step up/down swap** è una variante del plain vanilla IRS in cui il tasso della gamba fissa non è costante per tutta la durata del contratto. I pagamenti fissi sono infatti calcolati applicando un tasso che cresce (*step up*) o decresce (*step down*) di una quota prefissata alle date di regolamento. La struttura del contratto rimane invariata: una gamba a tasso fisso viene scambiata contro una gamba a tasso variabile denominata nella stessa valuta.

Un'ulteriore estensione è rappresentata dalla presenza di un **upfront**. In questo caso, pur mantenendo la tipica configurazione fisso-contro-variabile, una delle controparti paga un tasso fisso diverso dal par swap rate e riceve (o versa) un importo iniziale, l'*upfront*, tale da riportare a zero il valore dello swap alla data di stipula.

In generale, un IRS ha valore iniziale nullo quando il tasso fisso contrattuale coincide con il tasso di parità. Se il tasso fisso applicato è superiore al par swap rate, la controparte che paga fisso accetta condizioni meno favorevoli e riceve un upfront compensativo. Viceversa, se il tasso fisso contrattuale è inferiore al par swap rate, sarà la controparte che riceve

variabile a essere compensata tramite un upfront.

In sintesi, negli IRS con struttura modificata (step up/down) o con upfront lo schema dei flussi rimane quello del plain vanilla, ma la componente fissa viene adattata per riflettere esigenze specifiche delle controparti, quali la modifica del profilo temporale dei pagamenti o l'ottenimento di liquidità immediata.

Esempio 10.5. *Determinare i tassi swap $i_{sw}(0, 1)$ e $i_{sw}(1, 2)$ di uno swap a due anni con regolamento annuale, nell'ipotesi che il tasso swap segua una struttura step-down con riduzione del 5% nel secondo anno.*

Un istituto bancario stipula con un proprio cliente uno swap a due anni in cui la banca riceve il tasso fisso e corrisponde il tasso variabile. Indichiamo con V il nozionale, con V^f il valore della gamba fissa e con V^v il valore della gamba variabile.

Per uno swap generico, il valore della gamba fissa è dato da

$$V^f = V \left(i_{sw} \sum_{j=1}^m B(t_0, t_j) + B(t_0, t_m) \right),$$

dove $B(t_0, t_j)$ è il prezzo dello zero-coupon con scadenza t_j . Il valore dello swap alla stipula del contratto soddisfa

$$V^{sw} = V^f - V^v = 0.$$

Nel caso in esame ($m = 2$), la gamba fissa assume la forma

$$V^f = V [i_{sw}(0, 1)B(0, 1) + i_{sw}(1, 2)B(0, 2)] + VB(0, 2).$$

Poiché il tasso swap segue una struttura *step-down* con riduzione del 5%, vale

$$i_{sw}(1, 2) = i_{sw}(0, 1) (1 - 0.05).$$

Sostituendo nell'Eqn. $V^{sw} = 0$ si ottiene:

$$V [i_{sw}(0, 1)B(0, 1) + i_{sw}(0, 1)(1 - 0.05)B(0, 2)] + VB(0, 2) - V^v = 0.$$

Dividendo per V e risolvendo rispetto a $i_{sw}(0, 1)$ si ricava:

$$i_{sw}(0, 1) = \frac{\frac{V^{sw} + V^v}{V} - B(0, 2)}{B(0, 1) + (1 - 0.05)B(0, 2)}.$$

Una volta determinato $i_{sw}(0, 1)$, il tasso swap del secondo anno è dato direttamente da:

$$i_{sw}(1, 2) = i_{sw}(0, 1) (1 - 0.05).$$

■

Esempio 10.6. *Determinare il tasso swap 2Y/6M alla stipula di un IRS con upfront.*

Un istituto bancario ha stipulato uno swap in cui cliente sottoscrittore paga fisso e riceve variabile, per un nozionale pari a €140,000 e con durata pari a due anni. La struttura dei tassi a pronti è piatta al livello $i = 2.98\%$.

Alla stipula del contratto, la banca versa un upfront pari a €1,200 e la condizione di equilibrio richiede che il valore iniziale dello swap sia nulla, ossia,

$$V^{sw} = V^f - V^v - \text{upfront} = 0,$$

da cui

$$V^f = €140,000 + €1,200 = €141,200.$$

Il valore attuale della gamba fissa è dato da

$$V^f = V \frac{i_{sw}(0, 2)}{2} [B(0, 0.5) + B(0, 1) + B(0, 1.5) + B(0, 2)] + V B(0, 2),$$

dove $B(0, t) = (1 + 0.0298)^{-t}$.

Uguagliando le due espressioni di V^f e isolando il tasso swap si ottiene

$$i_{sw}(0, 2) = 2 \frac{\frac{141,200}{140,000} - B(0, 2)}{B(0, 0.5) + B(0, 1) + B(0, 1.5) + B(0, 2)} = 3.40\%.$$

Il tasso swap che rende nullo il valore dello swap alla stipula del contratto, tenendo conto dell'upfront iniziale, è quindi pari al **3.40%**. ■

Formulario

1. Frazione (o multiplo) della periodicit  del tasso:

$$\frac{\tau}{n} = \frac{s-t}{n}.$$

2. Interesse semplice:

$$I(t, s) = I\left(\frac{\tau}{n}\right) = C i \frac{s-t}{n}.$$

3. Sconto semplice:

$$D(t, s) = D\left(\frac{\tau}{n}\right) = C d \frac{s-t}{n}.$$

4. Tasso d'interesse e tasso di sconto periodali (definizioni generali):

$$i_{\tau}(t, s) = \frac{V(s) - V(t)}{V(t)}, \quad d_{\tau}(t, s) = \frac{V(s) - V(t)}{V(s)}.$$

5. Conversione tra basi 360 e 365:

$$i_{360} = i_{365} \frac{360}{365}, \quad i_{365} = i_{360} \frac{365}{360}.$$

6. Relazione tra tasso d'interesse e tasso di sconto (modello lineare):

$$i = \frac{d}{1 - d(\tau/n)}, \quad d = \frac{i}{1 + i(\tau/n)}.$$

7. Valore attuale e futuro nel modello lineare:

$$V(t + \tau) = V(t)(1 + i\tau), \quad V(t) = V(t + \tau)(1 + i\tau)^{-1}.$$

8. Valore attuale e futuro nel modello di sconto semplice:

$$V(t + \tau) = \frac{V(t)}{1 - d\tau}, \quad V(t) = V(t + \tau)(1 - d\tau).$$

9. Valore attuale e futuro nel modello esponenziale (capitalizzazione composta):

$$V(s) = V(t)(1 + i)^{s-t}, \quad V(t) = V(s)(1 + i)^{-(s-t)}.$$

10. Valore attuale e futuro con intensità istantanea costante δ :

$$V(s) = V(t)e^{\delta(s-t)}, \quad V(t) = V(s)e^{-\delta(s-t)}.$$

11. Fattore di sconto uniperiodale:

$$p = (1 + i)^{-1} = e^{-\delta}.$$

12. Tassi equivalenti nel modello lineare:

$$i = i_n n, \quad i_n = \frac{i}{n}.$$

13. Tassi equivalenti nel modello esponenziale (capitalizzazione composta):

$$i = (1 + i_n)^n - 1, \quad i_n = (1 + i)^{1/n} - 1.$$

14. Tasso nominale j_n convertibile n volte l'anno:

$$i = \left(1 + \frac{j_n}{n}\right)^n - 1, \quad j_n = n[(1 + i)^{1/n} - 1].$$

15. Valore temporale di un flusso finanziario su scadenziario discreto:

$$\bar{V}(t_k) = \sum_{j=1}^m V_j p^{t_j - t_k}.$$

16. Valore temporale di un portafoglio:

$$\bar{\Pi}(t_k) = \sum_{i=1}^N u_i \bar{V}_i(t_k).$$

17. Valore attuale di una rendita unitaria (rate posticipate e anticipate):

$$a_{m|i} = \frac{1 - (1+i)^{-m}}{i}, \quad \ddot{a}_{m|i} = \frac{1 - (1+i)^{-m}}{d},$$

$$\text{con } d = \frac{i}{1+i}.$$

18. Valore futuro di una rendita unitaria:

$$s_{m|i} = \frac{(1+i)^m - 1}{i}, \quad \ddot{s}_{m|i} = \frac{(1+i)^m - 1}{d}.$$

19. Rendite unitarie perpetue:

$$a_{\infty|i} = \frac{1}{i}, \quad \ddot{a}_{\infty|i} = \frac{1}{d}.$$

20. Rendite unitarie differite di h periodi:

$${}_h a_{m|i} = p^h a_{m|i}, \quad {}_h \ddot{a}_{m|i} = p^h \ddot{a}_{m|i}.$$

21. Prezzo di un titolo a cedola fissa (capitalizzazione composta a tasso y):

$$B(0) = \sum_{j=1}^m \frac{C_j}{(1+y)^{t_j}} + \frac{V}{(1+y)^{t_m}},$$

dove C_j sono le cedole (comprehensive di eventuali premi) e V il valore nominale.

22. Rendimento effettivo a scadenza (yield to maturity) y^* :

$$B(0) = \sum_{j=1}^m \frac{C_j}{(1+y^*)^{t_j}} + \frac{V}{(1+y^*)^{t_m}},$$

equazione da risolvere rispetto a y^* .

23. Valore Attuale Netto (VAN) con tassi a scadenza i_t :

$$VAN(t_0) = C_0 + \sum_{t=1}^m \frac{C_t}{(1+i_t)^t}.$$

24. Proprietà di additività del VAN (progetti A e B):

$$VAN(A) + VAN(B) = VAN(A+B).$$

25. Tasso Interno di Rendimento (TIR) di un flusso $\{C_0, C_1, \dots, C_m\}$:

$$0 = C_0 + \frac{C_1}{1+i^*} + \frac{C_2}{(1+i^*)^2} + \dots + \frac{C_m}{(1+i^*)^m}.$$

26. Indice di profittabilità (IP), con investimento iniziale $C_0 > 0$:

$$IP = \frac{\sum_{t=1}^m \frac{C_t}{(1+i)^t}}{-C_0}.$$

27. Prezzo di uno ZCB in regime esponenziale a tasso costante:

$$B(t, s) = \frac{1}{(1+i)^{s-t}} = e^{-\delta(s-t)}.$$

28. Tassi a pronti e a termine:

$$i(t, s) = \left[\frac{1}{B(t, s)} \right]^{1/(s-t)} - 1, \quad i(t, T, s) = \left[\frac{1}{B(t, T, s)} \right]^{1/(s-T)} - 1.$$

29. Intensità a pronti e a termine:

$$\delta(t, s) = -\frac{\ln B(t, s)}{s-t}, \quad \delta(t, T, s) = \frac{\delta(t, s)(s-t) - \delta(t, T)(T-t)}{s-T}.$$

30. Tassi forward da tassi spot su scadenziario discreto:

$$i(t, t+j-1, t+j) = \frac{[1+i(t, t+k)]^k}{[1+i(t, t+k-1)]^{k-1}} - 1.$$

31. Tassi spot da tassi forward su scadenziario discreto:

$$i(t, t+k) = \left\{ \prod_{j=1}^k [1+i(t, t+j-1, t+j)] \right\}^{1/k} - 1.$$

32. Tasso di parità (coupon par) per un titolo di durata m :

$$c^* = \frac{1 - B(t, t+m)}{\sum_{j=1}^m B(t, t+j)}.$$

33. Macaulay duration con struttura a pronti:

$$D(t, \bar{V}) = \frac{\sum_{j=1}^m j V_j (1 + i(t, t + j))^{-j}}{\sum_{j=1}^m V_j (1 + i(t, t + j))^{-j}},$$

oppure, con intensità:

$$D(t, \bar{V}) = \frac{\sum_{j=1}^m j V_j e^{-\delta(t, t+j)j}}{\sum_{j=1}^m V_j e^{-\delta(t, t+j)j}}.$$

34. Flat yield duration (tasso i o intensità δ costante):

$$D(t, \bar{V}) = \frac{\sum_{j=1}^m j V_j (1 + i)^{-j}}{\sum_{j=1}^m V_j (1 + i)^{-j}}, \quad D(t, \bar{V}) = \frac{\sum_{j=1}^m j V_j e^{-\delta j}}{\sum_{j=1}^m V_j e^{-\delta j}}.$$

35. Duration di secondo ordine:

$$D^{(2)}(t, \bar{V}) = \frac{\sum_{j=1}^m j^2 V_j (1 + i)^{-j}}{\sum_{j=1}^m V_j (1 + i)^{-j}}, \quad D^{(2)}(t, \bar{V}) = \frac{\sum_{j=1}^m j^2 V_j e^{-\delta j}}{\sum_{j=1}^m V_j e^{-\delta j}}.$$

36. Modified duration:

$$MD(t, \bar{V}) = \frac{D(t, \bar{V})}{1 + i}.$$

37. Duration di un portafoglio:

$$D(t, \bar{\Pi}) = \sum_{i=1}^N d_i D(t, \bar{V}_i), \quad d_i = \frac{u_i \bar{V}_i(t)}{\bar{\Pi}(t)}.$$

38. Semielasticità (in funzione del tasso e dell'intensità):

$$\frac{\bar{V}'(i)}{\bar{V}(i)} = -\frac{1}{1 + i} D(0, \bar{V}), \quad \frac{\bar{V}'(\delta)}{\bar{V}(\delta)} = -D(0, \bar{V}).$$

39. Convexity (derivata seconda normalizzata):

$$\frac{\bar{V}''(i)}{\bar{V}(i)} = \frac{1}{(1+i)^2} [D^{(2)}(0, \bar{V}) + D(0, \bar{V})], \quad \frac{\bar{V}''(\delta)}{\bar{V}(\delta)} = D^{(2)}(0, \bar{V}).$$

40. Approssimazione di primo e secondo ordine della variazione di prezzo:

$$\frac{\Delta \bar{V}}{\bar{V}} \approx -MD \Delta i + \frac{1}{2} CONV (\Delta i)^2.$$

41. Hedge ratio tra due titoli V_1 e V_2 :

$$\alpha = \frac{MD(t, V_1) B(t, t_m)}{MD(t, V_2) B(t, t_q)},$$

dove α è il valore nominale di V_2 necessario per coprire una posizione di un euro in V_1 .

42. Valore attuale di una cedola indicizzata con spread θ :

$$c(t) = B(t, T) + (\theta - 1)B(t, s).$$

43. Valore attuale di un titolo indicizzato con spread (schema generale):

$$\bar{V}(t) = \begin{cases} VB(t, t_0) + V\theta \sum_{j=1}^m B(t, t_j), & t < t_0, \\ V + V\theta \sum_{j=k+1}^m B(t, t_j), & t = t_k, \\ VB(t, t_k)(1 + c_k + \theta) + V\theta \sum_{j=k+1}^m B(t, t_j), & t_{k-1} < t < t_k. \end{cases}$$

44. Valore di un mutuo indicizzato con spread (schema generale):

$$\bar{A}(t) = \begin{cases} SB(t, t_0) + \theta \sum_{j=1}^m D_{j-1} B(t, t_j), & t < t_0, \\ D_k + \theta \sum_{j=k+1}^m D_{j-1} B(t, t_j), & t = t_k, \\ (D_{k-1} + I_k)B(t, t_k) + \theta \sum_{j=k+1}^m D_{j-1} B(t, t_j), & t_{k-1} < t < t_k. \end{cases}$$

45. Formula di bootstrap per i tassi spot da prezzi di CBB:

$$i(0, k\tau) = \left\{ \frac{1 + c_k}{B(0, k\tau) - c_k \sum_{j=1}^{k-1} [1 + i(0, j\tau)]^{-j\tau}} \right\}^{1/(k\tau)} - 1.$$

46. Tassi swap di parità:

$$i_{\text{sw}}(t, t + m) = \frac{1 - B(t, t + m)}{\sum_{j=1}^m B(t, t + j)}.$$

47. Tassi spot da tassi par swap:

$$i(t, t + 1) = i_{\text{sw}}(t, t + 1),$$

$$i(t, t + k) = \left[\frac{1 + i_{\text{sw}}(t, t + k)}{1 - i_{\text{sw}}(t, t + k) \sum_{j=1}^{k-1} B(t, t + j)} \right]^{1/k} - 1, \quad k > 1.$$

48. Payoff di un FRA (posizione long sul tasso):

$$\Lambda(T, s) = C \frac{[L(T, s) - FRA_{T \times s}] \tau / n}{1 + L(T, s) \tau / n}.$$

49. Mark-to-market di una posizione su n futures:

$$MTM(t - 1, t) = nC [F(t, T) - F(t - 1, T)].$$

50. Numero di tick:

$$\eta(t, t - 1) = \frac{F(t, T) - F(t - 1, T)}{\sigma}.$$

51. Mark-to-market in funzione del numero di tick:

$$MTM(t - 1, t) = n \eta(t - 1, t) \phi.$$

52. Formula cash-and-carry per i prezzi forward (struttura piatta δ):

$$f(t, T) = B(t) e^{\delta(T-t)}.$$

Glossario

A

Ammortamento: Processo di restituzione graduale di un debito tramite pagamenti periodici (rate), ciascuno composto da una quota capitale e da una quota interessi, secondo un piano prestabilito.

Arbitraggio: Operazione finanziaria che consente di ottenere un profitto (profitto di arbitraggio) in assenza di rischio e senza investimento netto iniziale, sfruttando disallineamenti di prezzo esistenti sul mercato.

Ask price (ask): Termine anglosassone per indicare il prezzo *lettera*, ossia il prezzo minimo a cui un operatore è disposto a vendere un titolo.

B

Banca Centrale Europea (BCE): Autorità di politica monetaria dell'area euro, istituita dal Trattato di Maastricht. Definisce e attua la politica monetaria unica, emette banconote in euro, gestisce le riserve ufficiali dell'Eurosistema e contribuisce alla stabilità del sistema finanziario.

Basi (basis): Convenzioni temporali usate nel calcolo degli interessi (ad esempio Act/Act, E30/360, 30/360, Act/360). La convenzione specifica il metodo di conteggio dei giorni tra due date e il numero di giorni assunti per l'anno di riferimento.

Basis Point (bp): Unità di misura uguale a un centesimo di punto percentuale ($0,01\% = 1 \text{ bp}$). Spesso si indica $100 \text{ bp} = 1\%$.

Benchmark: Titolo o portafoglio di riferimento utilizzato per confrontare rendimenti, rischi o la performance di un investimento (ad esempio un indice obbligazionario o un titolo di Stato rappresentativo).

Bid-ask spread (spread): Differenza tra ask e bid; misura dell'illiquidità del titolo o del costo di transazione per entrare e uscire da una posizione.

Bid price (bid): Termine anglosassone per indicare il prezzo *denaro*, ossia

il prezzo massimo che un operatore è disposto a pagare per acquistare un titolo.

Bond: Termine anglosassone equivalente a obbligazione.

Bund: Titolo di Stato tedesco a tasso fisso di medio-lungo termine, considerato tipico esempio di attività priva di rischio nell'area euro (risk-free) per la curva dei rendimenti in euro.

Bullet Bond (bullet): Obbligazione che paga cedole periodiche e rimborsa il capitale in un'unica soluzione alla scadenza.

Buoni del Tesoro Poliennali (BTP): Titoli di Stato italiani a tasso fisso di medio-lungo termine. Pagano cedole periodiche posticipate e rimborsano il valore nominale alla scadenza.

Buoni Ordinari del Tesoro (BOT): Titoli di Stato italiani a breve termine (tipicamente tre, sei o dodici mesi). Sono titoli zero coupon emessi sotto la pari e rimborsati alla pari in un'unica soluzione. Il rendimento è dato dalla differenza tra il valore di rimborso (valore nominale) e il prezzo di emissione.

C

Capital Gain: Guadagno in conto capitale, realizzato vendendo un titolo a un prezzo maggiore di quello di acquisto.

Capital Loss: Perdita in conto capitale, realizzata vendendo un titolo a un prezzo inferiore a quello di acquisto.

CBOT: Chicago Board of Trade, uno dei principali mercati regolamentati per la negoziazione di future e opzioni su commodity e strumenti finanziari.

Cedola: Importo periodico corrisposto dall'emittente al detentore di un titolo a reddito fisso. È pari al prodotto tra tasso cedolare e valore nominale del titolo, eventualmente rapportato alla frequenza di pagamento.

Certificati del Tesoro Zero-coupon (CTZ): Titoli di Stato italiani privi di cedole (zero coupon) a tasso fisso, con durata tipicamente pari a 18 o 24 mesi. Sono emessi sotto la pari e rimborsati alla pari alla scadenza; il rendimento è dato dalla differenza tra valore di rimborso e prezzo di emissione. Dal 2011 tali strumenti sono stati progressivamente sostituiti dai BTP Short Term, con scadenza fino a 2 anni, che prevedono il pagamento di una cedola.

Certificati di Credito del Tesoro (CCT): Titoli di Stato italiani a medio-lungo termine a tasso variabile. Le cedole sono indicizzate al tasso EURIBOR (tipicamente a sei mesi), maggiorate di uno *spread* prefissato.

Certificato di Deposito (CD): Deposito vincolato presso una banca, rappresentato da un titolo, con durata prefissata (fino a 5 anni) e tasso fisso o variabile.

Convexity: Misura della curvatura della relazione tra prezzo di un'obbligazione e tasso di interesse. Integra l'informazione fornita dalla duration, migliorando l'approssimazione della variazione di prezzo per variazioni non infinitesime dei tassi.

Copertura: Operazione che riduce l'esposizione al rischio di variazione dei prezzi, dei tassi o dei cambi. Può essere realizzata tramite strumenti derivati o portafogli opportunamente costruiti.

Corso: Prezzo attribuito a un titolo per effetto della contrattazione sul mercato (può essere espresso in percentuale del valore nominale).

Corso secco: Prezzo di un titolo che non include il rateo di interesse maturato dalla cedola in corso.

Coupon: Termine inglese per indicare la cedola.

D

Dirty Price: È dato dalla somma tra il prezzo al corso secco e il rateo.

Duration: Misura della vita finanziaria media di un titolo obbligazionario, ottenuta come media ponderata delle scadenze dei flussi di cassa, utilizzando come pesi i valori attuali dei flussi. Fornisce un'approssimazione della sensibilità del prezzo del titolo alle variazioni dei tassi di interesse.

Duration modificata: Versione della duration che misura direttamente la variazione percentuale approssimata del prezzo dell'obbligazione a fronte di una piccola variazione del tasso di rendimento.

E

EURO InterBank Offered Rate (EURIBOR): Tasso di interesse a breve termine (per diverse scadenze da 1 settimana fino a 12 mesi), utilizzato come riferimento per gli scambi interbancari a livello europeo. È calcolato come media dei tassi ai quali un campione di banche europee è disposto a prestare fondi non garantiti ad altre banche.

Euro-obbligazione (Eurobond): Obbligazione emessa da società, enti nazionali o esteri, Stati o organismi sovranazionali, denominata in

una valuta diversa da quella del Paese in cui è collocata e soggetta a una normativa diversa da quella dell'emittente. In Italia, molte euro-obbligazioni sono negoziate sul mercato EuroMOT.

EURIRS: Tasso di interesse di riferimento per gli interest rate swap (IRS) denominati in euro, quotato per diverse scadenze (1 anno, 2 anni, ..., 50 anni).

F

Fair value: Valore teorico di uno strumento finanziario, calcolato sulla base dei flussi di cassa attesi e dei tassi di attualizzazione di mercato, in assenza di opportunità di arbitraggio.

Forward: Contratto a termine non standardizzato, negoziato tipicamente *over the counter*, che prevede lo scambio di un'attività (o di un flusso di cassa) a una data futura e a un prezzo prefissato oggi.

Forward Rate Agreement (FRA): Contratto derivato a termine in cui due controparti si scambiano, a una data futura, la differenza tra un tasso d'interesse fisso prefissato e un tasso variabile di riferimento, applicata a un capitale nozionale per un periodo specifico.

Future: Strumento derivato costituito da un contratto a termine standardizzato, negoziato in mercati regolamentati, relativo all'acquisto o alla vendita futura di una merce o di un'attività finanziaria (sottostante) a un prezzo fissato al momento della stipula.

H

Hedging: Termine anglosassone per indicare un'operazione di copertura del rischio di mercato (tasso, prezzo, cambio, ecc.).

I

Interest rate future (IRF): Strumento derivato, appartenente alla categoria dei *financial futures*, costituito da un contratto a termine standardizzato relativo a titoli a tasso fisso (titoli di Stato, obbligazioni), con regolamento futuro a un prezzo prefissato.

Internal Rate of Return (IRR, TIR): Tasso interno di rendimento di un progetto o investimento, definito come il tasso che rende nullo il valore attuale netto (VAN) dei flussi di cassa associati.

ISIN (International Securities Identification Number): Codice internazionale univoco che identifica un titolo quotato nei mercati ufficiali. È composto da 12 caratteri alfanumerici.

L

Leverage (leva finanziaria): Rapporto tra il valore delle posizioni aperte e il capitale effettivamente investito. Indica la capacità di controllare un ammontare di risorse finanziarie superiore al capitale proprio, amplificando rendimenti potenziali e rischi.

LIFFE: London International Financial Futures & Options Exchange, mercato per la negoziazione di future e opzioni su strumenti finanziari.

London InterBank Offered Rate (LIBOR): Storico tasso di riferimento per i prestiti interbancari in diverse valute. È stato progressivamente sostituito, a partire dalla seconda metà degli anni 2010, da tassi di riferimento privi di rischio (risk-free rates) come SONIA, SOFR, ecc.

Long position (long): Posizione in beni d'investimento o strumenti derivati che trae beneficio dall'aumento del prezzo del sottostante.

M

Mark-to-market: Procedura di valutazione giornaliera delle posizioni in strumenti derivati o titoli *mark to market*, adeguando il loro valore al prezzo di mercato corrente e regolando i margini (margin call).

Mercato all'ingrosso dei Titoli di Stato (MTS): Mercato telematico all'ingrosso dove si negoziano i titoli di Stato quotati e non quotati in Borsa, sulla base di importi minimi rilevanti. Vi operano prevalentemente investitori istituzionali.

Mercato Obbligazionario Telematico (MOT): Comparto di Borsa Italiana S.p.A. per la negoziazione, in lotti minimi o loro multipli, di obbligazioni (non convertibili) e titoli di Stato. È un mercato ad asta in cui gli ordini sono accoppiati principalmente sulla base del prezzo.

Montante: Valore futuro di un capitale investito a un determinato tasso

e per un certo periodo di tempo, comprensivo del capitale iniziale e degli interessi maturati.

N

Nozionale: Valore nominale utilizzato per il calcolo dei flussi di cassa negli swap, nei contratti forward e, in generale, nei derivati liquidati per differenziale. Il capitale nozionale non viene scambiato, ma funge da base di calcolo per interessi o differenziali.

Net Present Value (NPV, VAN): Valore Attuale Netto di un progetto, pari alla somma dei flussi di cassa attesi attualizzati a un dato tasso, al netto dell'investimento iniziale.

O

Obbligazione: Titolo di credito emesso da una società o da un ente pubblico. Conferisce al sottoscrittore la qualifica di creditore dell'emittente, con diritto alla percezione di interessi (cedole) e al rimborso del capitale a scadenza.

Obbligazioni convertibili: Obbligazioni che attribuiscono al possessore il diritto di convertirle in azioni della società emittente (o di una società del gruppo) secondo un rapporto di conversione prestabilito.

Opzione (option): Contratto derivato che attribuisce al compratore il diritto, ma non l'obbligo, di acquistare (call) o vendere (put) un'attività sottostante a un prezzo prefissato entro o a una certa data.

Over-the-Counter (OTC): Mercato non regolamentato in cui le transazioni avvengono bilateralmente tra le controparti, senza un luogo fisico o una piattaforma centralizzata di scambio e con contratti spesso non standardizzati.

P

Portafoglio: Insieme di attività finanziarie detenute da un investitore (titoli di Stato, obbligazioni, azioni, derivati, ecc.), gestite congiuntamente secondo una strategia di investimento o di copertura.

Prezzo denaro (denaro): Nel gergo di Borsa, il prezzo massimo di acquisto

che un operatore è disposto a pagare per uno strumento finanziario.

Prezzo lettera (lettera): Nel gergo di Borsa, il prezzo minimo di vendita a cui un operatore è disposto a cedere uno strumento finanziario.

R

Rating delle obbligazioni (rating): Valutazione del merito di credito di un emittente (o di una specifica emissione) fornita da agenzie specializzate. Misura la probabilità di insolvenza e la capacità di adempiere agli impegni di pagamento.

Rendimento a scadenza (yield to maturity, YTM): Tasso interno di rendimento di un titolo obbligazionario, calcolato eguagliando il prezzo di mercato alla somma dei flussi di cassa futuri (cedole e rimborso) attualizzati a tale tasso.

Rischio di tasso d'interesse: Rischio di variazione del valore di un'attività o passività finanziaria a seguito di variazioni inattese dei tassi di interesse di mercato.

Rischio di credito: Rischio che l'emittente di un titolo (o la controparte contrattuale) non sia in grado di adempiere ai propri obblighi di pagamento (default o ristrutturazione del debito).

S

Short position (short): Posizione in beni di investimento o strumenti derivati che trae profitto dal ribasso dei prezzi del sottostante (ad esempio, vendita allo scoperto).

Sopra la pari: Espressione che indica che il prezzo di emissione o di mercato di un titolo è superiore al suo valore nominale.

Sotto la pari: Espressione che indica che il prezzo di emissione o di mercato di un titolo è inferiore al suo valore nominale.

Sottostante (underlying): Attività di riferimento di un contratto derivato (materie prime, valute, tassi di interesse, titoli, indici, ecc.).

Spread: Differenza tra due tassi di interesse o rendimenti (ad esempio tra il rendimento di un titolo rischioso e quello di un titolo privo di rischio, o tra tassi di due scadenze diverse).

Struttura a termine dei tassi (term structure): Relazione tra i tassi di

interesse (o i rendimenti) e le scadenze dei titoli privi di rischio denominati nella stessa valuta. È rappresentata dalla curva dei rendimenti.

Swap: Strumento derivato che prevede lo scambio di flussi finanziari tra due controparti secondo modalità prefissate (ad esempio scambio tra tasso fisso e tasso variabile). Nel mercato dei capitali, l'*interest rate swap* è il caso più comune.

T

Tasso annuale effettivo globale (TAEG): Indicatore sintetico del costo totale di un finanziamento per il debitore, espresso in percentuale annua del capitale finanziato e comprensivo di interessi e oneri accessori.

Tasso interno di rendimento (TIR): Si veda **Internal Rate of Return (IRR)**.

Tasso privo di rischio (risk-free rate): Tasso di interesse associato a un'attività considerata priva di rischio di credito e con elevata liquidità (ad esempio titoli di Stato di alta qualità di credito per scadenze brevi).

Tasso overnight: Tasso interbancario applicato al trasferimento di fondi tra due controparti con restituzione il giorno lavorativo successivo.

Tel quel: Si veda **Dirty price**.

TFE: Tokyo Financial Exchange (ex TIFFE), mercato giapponese per futures su strumenti finanziari.

Treasury Bill (T-Bill): Titolo di Stato statunitense a breve termine (fino a un anno), emesso sotto la pari e senza cedole (zero coupon). Il rendimento è dato dalla differenza tra prezzo di rimborso e prezzo di acquisto.

Treasury Bond (T-Bond): Titolo di Stato statunitense a tasso fisso di medio-lungo termine. È analogo, per struttura, ai BTP italiani, ai Bund tedeschi e ai Gilt britannici.

V

Valore attuale: Valore oggi (in un dato istante di riferimento) di flussi di cassa futuri, ottenuto attualizzando i flussi a un tasso di interesse appropriato.

Valore attuale netto (VAN): Si veda **Net Present Value (NPV)**.

Valore facciale (Facciale): Si veda **Valore nominale**.

Valore nominale (Nominale): Per le azioni, è la frazione di capitale sociale

rappresentata da un titolo; per le obbligazioni, è l'importo sul quale sono calcolati gli interessi e che l'emittente si impegna a rimborsare alla scadenza.

Valuta: Data di regolamento di un'operazione finanziaria, dalla quale decorre il conteggio degli interessi e in cui avviene il regolamento dei flussi monetari.

Z

ZCB (Zero Coupon Bond): Obbligazione a tasso fisso priva di cedole. È emessa sotto la pari e rimborsata alla pari alla scadenza. Il rendimento è dato dalla differenza tra il prezzo di sottoscrizione e il valore di rimborso.

Matematica finanziaria

Fondamenti, metodi e applicazioni

Andrea Consiglio, Simone Giansante, Davide Provenzano

Il volume illustra i principi della matematica finanziaria con un approccio strutturato e progressivo, pensato per aiutare gli studenti a comprendere i principali meccanismi che guidano i mercati finanziari. Dopo aver introdotto concetti fondamentali quali interesse, sconto e valore del denaro nel tempo, il testo descrive in dettaglio i modelli per la valutazione di flussi finanziari, obbligazioni, mutui e rendite. Una sezione centrale esamina la struttura a termine dei tassi di interesse, le misure di rischio legate alle variazioni dei tassi e gli indicatori utilizzati per confrontare investimenti alternativi, tra cui VAN e TIR. Il volume si conclude con una panoramica dei derivati più diffusi, illustrandone il ruolo nella protezione dei portafogli e nella gestione del rischio da tasso d'interesse.

In copertina: illustrazione prodotta dagli autori.

ISBN 979-12-5510-370-7 (print)
ISBN 979-12-5510-375-2 (PDF)
ISBN 979-12-5510-377-6 (EPUB)
DOI 10.54103/milanoup.281