

Logica pratica

Dai quesiti dei test di ammissione
ai metodi della logica elementare

Esther Anna Corsi e Hykel Hosni



Manuali

Esther Anna Corsi, Hykel Hosni
LUCI Lab, Università degli Studi di Milano

Logica Pratica

Dai quesiti dei test di ammissione
ai metodi della logica elementare

Logica Pratica. Dai quesiti dei test di ammissione ai metodi della logica elementare / Esther Anna Corsi, Hykel Hosni. Milano: Milano University Press, 2026.

ISBN 979-12-5510-428-5 (print)

ISBN 979-12-5510-424-7 (PDF)


ISBN 979-12-5510-426-1 (EPUB)

DOI 10.54103/milanoup.291

Questo volume e, in genere, quando non diversamente indicato, le pubblicazioni di Milano University Press sono sottoposti a un processo di revisione esterno sotto la responsabilità del Comitato editoriale e del Comitato Scientifico della casa editrice. Le opere pubblicate vengono valutate e approvate dal Comitato editoriale e devono essere conformi alla politica di revisione tra pari, al codice etico e alle misure antiplagio espressi nelle Linee Guida per pubblicare su MilanoUP.

Le edizioni digitali dell'opera sono rilasciate con licenza Creative Commons Attribution 4.0 - CC-BY-SA, il cui testo integrale è disponibile all'URL: <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0>



 Le edizioni digitali online sono pubblicate in Open Access su: <https://libri.unimi.it/index.php/milanoup>.

© The Author(s), 2026

© Milano University Press per la presente edizione

Pubblicato da:

Milano University Press

Via Festa del Perdono 7 - 20122 Milano

Sito web: <https://milanoup.unimi.it>

e-mail: redazione.milanoup@unimi.it

L'edizione cartacea del volume può essere ordinata in libreria ed è distribuita da Ledizioni (www.ledizioni.it)

Il lavoro di Esther Anna Corsi è stato supportato da Fondazione Cariplo attraverso la borsa post-dotto-rale Giovani Ricercatori 2023, nell'ambito del progetto Logics for Scientific Inferences (LOGSI) (grant n. 2023-0978).

Il lavoro di Hykel Hosni è supportato dal Ministero dell'Università e della Ricerca attraverso il finanziamento FIS1 Advanced Grant G53C23000510001.

Indice

I	Soluzioni dei “quesiti di logica”	1
1	Quesiti di matematica elementare	3
1.1	Il linguaggio elementare degli insiemi	4
1.2	Cardinalità	9
1.3	Relazioni	12
2	Quesiti risolvibili con la logica Booleana	19
2.1	Deduzioni con connettivi Booleani	20
2.2	Deduzioni con condizioni necessarie e sufficienti	36
2.3	Deduzioni con negazioni	44
2.4	Deduzioni con possibile, certo, necessario	51
3	Quesiti risolvibili con la logica dei predicati	59
3.1	Implicazioni quantificate	60
3.2	Deduzioni	64
3.3	Approfondimento: Predicati e relazioni insiemistiche	74
4	Quesiti di completamento delle sequenze	79
4.1	Completamento di successioni numeriche	80
4.2	Individuazione del numero mancante	87
4.3	Completamento di sequenze alfabetiche	91
4.4	Considerazioni sulla soluzione dei quesiti di completamento delle sequenze	94
5	Quesiti sulla probabilità	95
5.1	Identificazione delle situazioni possibili	96
5.2	Identificazione di eventi composti	99
5.3	Probabilità condizionate	103
6	Quesiti Riassuntivi	107
6.1	Insiemi	108
6.2	Relazioni	111
6.3	Logica Booleana	112
6.4	Logica dei predicati	115
6.5	Sequenze	118
6.6	Probabilità	119
6.7	Soluzioni	121

II	Teoria e metodologia logica proposizionale	135
7	Sintassi: Induzione e ricorsione	139
7.1	Sintassi proposizionale	140
7.1.1	Le variabili proposizionali	140
7.1.2	L'insieme delle formule	141
7.1.3	Sottoformule	141
7.2	La natura ricorsiva della sintassi proposizionale (★)	143
7.2.1	Il principio di induzione	143
7.3	Una definizione formale dell'insieme \mathcal{FL} (★)	146
7.3.1	Scomposizione univoca	149
7.3.2	Convenzioni per eliminare le parentesi	150
7.4	Esercizi	152
8	Semantica: Il significato dei connettivi proposizionali	155
8.1	Dalla sintassi alla semantica	156
8.2	Il significato matematico dei connettivi	157
8.2.1	Negazione	158
8.2.2	Congiunzione	158
8.2.3	Implicazione	159
8.2.4	Disgiunzione	162
8.3	Composizionalità	163
8.4	Connettivi e operazioni aritmetiche	165
8.4.1	Negazione	166
8.4.2	Congiunzione	166
8.4.3	Disgiunzione	167
8.4.4	Implicazione	168
8.5	Connettivi e operazioni insiemistiche	169
8.5.1	Disgiunzione e unione	171
8.5.2	Congiunzione e intersezione	171
8.5.3	Negazione e complemento	172
8.6	Proprietà dei connettivi	173
8.6.1	Identità di De Morgan	173
8.6.2	Commutatività	174
8.6.3	Associatività	175
8.6.4	Distributività	176
8.6.5	Involutività della negazione	178
8.6.6	Tautologie e contraddizioni	178
8.7	Completezza funzionale	179
8.8	Esercizi	187
9	Calcolemus!	191
9.1	Procedure basate sulle matrici Booleane	192
9.1.1	Soddisfacibilità	192
9.1.2	Tautologicità	194
9.1.3	Conseguenza logica	196
9.1.4	Equivalenza logica	199
9.2	Validità degli argomenti	200
9.3	Procedure basate sugli alberi di refutazione	203
9.3.1	Alberi di refutazione per decidere le tautologie	203

9.3.2	Regole di costruzione per gli alberi di refutazione	204
9.3.3	Alberi di refutazione per la soddisfacibilità	209
9.4	Confronto tra matrici Booleane e alberi di refutazione	212
9.5	Esercizi	217
10	Dal linguaggio comune al linguaggio proposizionale	221
10.1	L'ambiguità del linguaggio comune	222
10.2	Formalizzazione del linguaggio comune	224
10.2.1	Negazione	227
10.2.2	Congiunzione	229
10.2.3	Se ... allora	230
10.2.4	A meno che	231
10.3	Formalizzazione degli argomenti matematici	233
10.4	Argomenti rilevanti per la decisione	234
10.5	Esercizi	238
III	Appendici	241
A	Soluzioni di esercizi scelti	243
A.1	Parte I	243
A.1.1	Esercizio 8	243
A.1.2	Esercizio 9	244
A.2	Parte II	245
A.2.1	Esercizio 26	245
A.2.2	Esercizio 35	246
A.2.3	Esercizio 32	246
A.2.4	Esercizio 36	246
A.2.5	Esercizio 37	247
A.2.6	Esercizio 40	248
A.2.7	Esercizio 47	248
A.2.8	Esercizio 50	249
A.2.9	Esercizio 56	251
A.2.10	Esercizio 57	252
A.2.11	Esercizio 52	252
A.2.12	Esercizio 53	253

Elenco dei concetti principali (Parte I)

1.1.1	Come si definisce un insieme	5
1.2.1	Il principio di inclusione ed esclusione	9
1.3.1	Relazione riflessiva	15
1.3.2	Relazione simmetrica	15
1.3.3	Relazione transitiva	16
1.3.4	Prodotto cartesiano	17
2.1.1	Principio di bivalenza	20
2.1.2	Condizioni di verità dell'implicazione Booleana	21
2.1.3	I dati escludono situazioni logicamente possibili	23
2.1.4	Le condizioni di verità della congiunzione Booleana	24
2.1.5	L'implicazione Booleana non è simmetrica	25
2.1.6	Le condizioni di verità della disgiunzione Booleana	26
2.1.7	Segue da (conseguenza logica)	27
2.1.8	Le condizioni di verità della negazione Booleana	28
2.1.9	Equivalenza logica	31
2.1.10	Lunghezza delle tavole di verità	32
2.1.11	Un controesempio è sufficiente a invalidare una deduzione	35
2.2.1	Le implicazioni associate a un'implicazione data	38
2.2.2	Espressioni che identificano l'implicazione	39
2.2.3	Doppia implicazione	42
2.3.1	Equivalenze (o leggi) di De Morgan	46
2.3.2	Disgiunzione esclusiva e doppia implicazione	49
2.3.3	Le situazioni logiche sono mutualmente esclusive ed esaustive	51
2.4.1	Un numero pari di negazioni afferma	55
2.4.2	Modalità	56
3.1.1	Significato dei quantificatori	61
3.1.2	Negazione di un'implicazione quantificata universalmente	62
3.2.1	Una tautologia segue da qualsiasi premessa	72
5.2.1	Regola dell'addizione	99
5.2.2	Regola della probabilità totale	101
5.2.3	Regola del prodotto	101
5.3.1	Regola del prodotto condizionato	104

Elenco delle definizioni (Parte II)

7.3.1	L'insieme delle formule di \mathcal{L}	146
8.2.1	Valutazioni proposizionali	157
8.2.2	Negazione	158
8.2.3	Congiunzione	158
8.2.4	Implicazione	159
8.2.5	Disgiunzione	162
8.5.1	Inclusione tra insiemi	169
8.5.2	Intersezione tra insiemi	170
8.5.3	Unione tra insiemi	170
8.5.4	Complemento di un insieme	170
8.6.1	Equivalenza logica	173
8.7.1	Atomi di \mathcal{L}	179
9.1.1	Soddisfacibilità	192
9.1.2	Tautologia	194
9.1.3	Conseguenza logica	196
9.2.1	Argomento Valido	200
10.4.1	Argomento Rilevante per la decisione	234

Prefazione

La logica studia il modo in cui costruiamo argomenti. E argomentare serve, molto spesso, a convincere. Succede in tribunale, in televisione, al bar, sulle piattaforme *online* e nelle riviste scientifiche. In tutti questi contesti si formulano argomenti più o meno solidi, e più o meno onesti, per persuadere chi ascolta o legge ad adottare il nostro punto di vista.

Tra tutte le forme di argomentazione, la dimostrazione matematica occupa un posto speciale per la sua forza. Chiunque ne accetti le premesse deve accettarne anche la conclusione, purché la dimostrazione sia corretta.

Da più di duemila anni, uno degli obiettivi della logica è proprio chiarire che cosa renda corretta una dimostrazione. Ma, fuori dal suo ambito specialistico, chi presenta un argomento, compresa una dimostrazione matematica, lascia quasi sempre qualcosa implicito, cioè dà qualcosa per scontato.

Per chi studia, questo può essere interessante, ma più spesso è frustrante: è un po' come partecipare a un gioco senza conoscerne bene tutte le regole. Per questo lo studio della logica elementare può essere molto utile: aiuta a riconoscere e a rendere esplicito ciò che di solito resta implicito.

In questo modo diventa possibile ragionare sul ragionamento. Ed è proprio questo che bisogna imparare a fare, se si vuole ragionare meglio. Lo scopo di questo manuale è aiutarvi a farlo in modo autonomo e pratico, attraverso la discussione di problemi elementari.

Nella Parte I – **Risolvere i “quesiti di logica”** – cominceremo tuffandoci mani e piedi nella risoluzione dei quesiti tipicamente presenti nella sezione “logica” dei test di ammissione a numerosi corsi di studio universitari, e non solo. Si tratta di materiale fruibile a partire dall’ultimo anno di istruzione superiore. La selezione dei quesiti nasce dall’esperienza che Esther Anna Corsi ha maturato nel progetto [Uni.ON¹](#), dedicato al sostegno di ragazze e ragazzi che desiderano accedere all’università e necessitano, per riuscirvi, di un supporto formativo.

In questa parte ci concentreremo sull’analisi dei quesiti e sul ragionamento che porta alla loro soluzione. Introdurremo terminologia, elementi teorici ed elementi pratici sulla base del problema che stiamo risolvendo in modo graduale. Nella nostra intenzione questo vi permetterà di avviare e consolidare la vostra familiarità con il linguaggio e il ragionamento della matematica elementare in modo direttamente orientato alla risoluzione di problemi. In linea con i test di ammissione, nessuno dei quesiti di questa parte richiede competenze formali di logica. Abbiamo quindi ridotto al minimo l’uso di terminologia e simbolismo tipici dei manuali di logica, facendo invece leva sulle conoscenze implicite che avete già acquisito nel vostro percorso

¹www.union-borsedistudio.it

scolastico. Non si tratta soltanto di una scelta pedagogica. La logica moderna è in larga parte il risultato di un processo di astrazione dalla pratica matematica.

Nella Parte II –**I metodi della logica elementare** – vi aiuteremo ad affinare il modo logico di ragionare attraverso la discussione, sempre fatta per problemi ed esempi, di alcuni metodi centrali della logica elementare.

Il materiale di questa parte è pensato per chi, nei primi semestri del triennio universitario, frequenta corsi di laurea che non prevedono insegnamenti dedicati alla logica.

Il nostro obiettivo in questa seconda parte è mostrarvi alcuni aspetti centrali del modo logico di ragionare, tra cui:

- rendere esplicito l'oggetto del discorso (Capitolo 7)
- dedurre il valore di verità di un'espressione logica a partire da quello dei suoi componenti (Capitolo 8)
- definire procedure algoritmiche per risolvere i problemi logici (Capitolo 9)

Sono metodi che vi permetteranno di rendere sistematici, e quindi applicabili più in generale, i ragionamenti che hanno condotto alle soluzioni dei quesiti (rilevanti) della prima parte.

Mentre i capitoli precedenti si concentrano su **come si fa**, il Capitolo 10 vi aiuta a cogliere un aspetto importante della metodologia logica: **quando funziona, e quando no**. Questo veicola un punto centrale, ma purtroppo spesso sottovalutato: fuori dall'ambito della dimostrazione matematica, il metodo logico è necessario al buon ragionamento, ma non è sufficiente a garantirlo.

Alcune sezioni e alcuni esercizi sono etichettati con il segno ★ per indicare che sono un po' più complicati e quindi possono essere tralasciati a un primo passaggio.

In linea con la natura del volume abbiamo preferito non includere riferimenti bibliografici. Chi volesse approfondire gli argomenti di matematica discreta può consultare liberamente il celebre [Book of Proof](https://textbooks.aimath.org/textbooks/approved-textbooks/hammack/)². Mentre a chi volesse approfondire temi più propriamente logici segnaliamo [Open Logic](https://openlogicproject.org/)³, un progetto coordinato da Richard Zach che raccoglie una serie di manuali ad accesso libero (e *open source*).

²<https://textbooks.aimath.org/textbooks/approved-textbooks/hammack/>

³<https://openlogicproject.org/>

* * *

Gli esercizi e i problemi discussi in questo testo nascono dalla nostra pratica didattica nei corsi di laurea in Filosofia, Economia e Scienze Politiche dell'Università degli Studi di Milano e dell'Università Commerciale Luigi Bocconi di Milano. Ringraziamo quindi tutte le nostre studentesse e tutti i nostri studenti, dalle cui domande impariamo continuamente che non si è mai abbastanza chiari.

Ringraziamo Yugin Cho, Marcello D'Agostino, Francesco Di Betta e Simone P. Roca per aver letto una versione preliminare del testo e per averci aiutato a eliminare molte imprecisioni.

Ringraziamo infine la Milano University Press per aver accolto con entusiasmo la nostra proposta e per averci accompagnato con professionalità e pazienza nella sua realizzazione. Grazie alla loro dedizione e all'impegno infaticabile della dottoressa Paola Galimberti nella promozione della cultura della scienza aperta, possiamo oggi rendere il nostro materiale liberamente fruibile dentro e, ci auguriamo, anche fuori dall'università.

Parte I

Soluzioni dei “quesiti di logica”

1 Quesiti di matematica elementare

Notazione introdotta in questo capitolo:

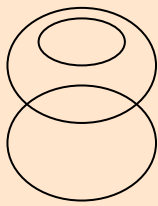
\in	appartiene
$\subseteq, (\subset)$	è un sottoinsieme (proprio) di
\cap	intersezione
\cup	unione
\setminus	differenza
\mathcal{U}	universo
\emptyset	l'insieme vuoto
$ A $	la cardinalità di A
\times	prodotto cartesiano

1.1	Il linguaggio elementare degli insiemi	4
1.2	Cardinalità	9
1.3	Relazioni	12

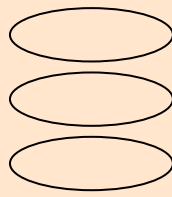
1.1 Il linguaggio elementare degli insiemi

Quesito 1.1.1:

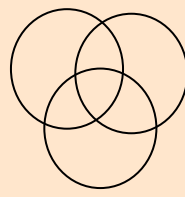
Individuare il diagramma che soddisfa la relazione insiemistica esistente tra i termini dati: Pesci, Animali acquatici, Mammiferi.



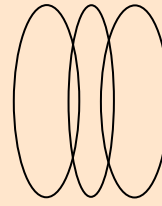
[A]



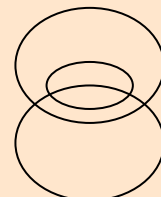
[B]



[C]



[D]



[E]

Terminologia e Notazione:

Con il termine **insieme** si intende un raggruppamento, una collezione, una famiglia di elementi.

Per rappresentare un insieme graficamente si possono utilizzare delle linee chiuse (diagrammi di Eulero-Venn). Solitamente si utilizzano ovali o cerchi, ma rettangoli, esagoni, stelle, etc. “funzionano” ugualmente.

Se due linee chiuse che rappresentano due insiemi distinti si sovrappongono, come nelle opzioni [A], [C] e [D], gli elementi che si trovano nella sovrapposizione dei due insiemi si dice che appartengono alla loro **intersezione**.

Se un insieme è completamente contenuto dentro ad un altro, come nell'opzione [A], l'insieme contenuto è un **sottoinsieme** dell'insieme che lo contiene. Se due insiemi non si sovrappongono, come nell'opzione [B], si dicono **disgiunti**. L'**unione** di due insiemi è definita come l'insieme che contiene tutti gli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi. L'insieme **complementare** di un generico insieme A (rispetto all'universo \mathcal{U}) è l'insieme di tutti e soli gli elementi di \mathcal{U} che non appartengono ad A . ◀

Siamo ora pronti per parlare del mondo animale.

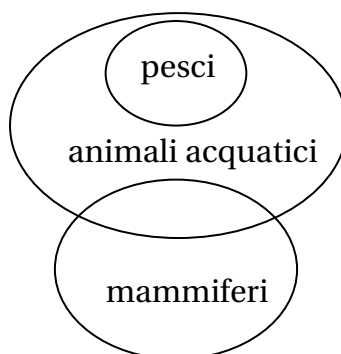
Ragionamento:

In particolare si osserva che

1. l'insieme dei pesci è un sottoinsieme degli animali acquatici e non esistono pesci che vivono fuori dall'acqua;
2. l'insieme dei pesci e l'insieme dei mammiferi sono disgiunti: non condividono alcun elemento;
3. esistono mammiferi che sono animali acquatici (es. delfini, balene), ma nessun mammifero è un pesce. Quindi, l'intersezione tra l'insieme dei mammiferi e l'insieme degli animali acquatici non è vuota, ma l'insieme dei mammiferi e l'insieme dei pesci sono disgiunti;
4. osserviamo infine che esistono animali acquatici che non sono né pesci né mammiferi (es. crostacei).

Soluzione:

Il diagramma [A] rappresenta la relazione tra pesci, animali acquatici e mammiferi.

**Teoria 1.1.1: Come si definisce un insieme**

Gli insiemi possono essere definiti per **elencazione**, cioè elencando tutti gli elementi che gli appartengono, o per **caratteristica**, cioè indicando la proprietà che caratterizza tutti gli elementi dell'insieme.

Gli elementi dell'insieme sono rappresentati da punti etichettati. Se un elemento appartiene all'insieme, allora la sua rappresentazione è collocata all'interno della linea chiusa; altrimenti è collocato fuori da essa.

Pratica 1.1.1:

I concetti della teoria elementare degli insiemi sono tipicamente abbreviati utilizzando dei simboli speciali.

Assumendo come insieme universo l'insieme dei numeri naturali \mathbb{N} , supponiamo di avere quattro insiemi numerici definiti (per elencazione) come segue:

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\};$$

$$B = \{1, 3\};$$

$$C = \{7, 9, 11, 13, 14\};$$

$$D = \{3, 5, 7, 9, 11, 13\}.$$

Vediamo ora come passare dal linguaggio naturale a quello formale attraverso alcuni esempi.

Linguaggio Naturale

1 appartiene all'insieme A

13 non appartiene all'insieme A

13 appartiene al complementare di A

L'insieme B è un sottoinsieme di A

C non è un sottoinsieme di A

7 e 9 appartengono all'intersezione di A e C

D è incluso nell'unione di A e C

Linguaggio Formale

$$1 \in A$$

$$13 \notin A$$

$$13 \in A^c = \mathbb{N} \setminus A$$

$$B \subseteq A$$

$$C \not\subseteq A$$

$$7, 9 \in A \cap C$$

$$\text{oppure } \{7, 9\} \subseteq A \cap C$$

$$D \subseteq A \cup C$$

Quesito 1.1.2:

Facendo riferimento ai diagrammi del Quesito 1.1.1, individuare quale soddisfa la relazione insiemistica esistente fra i termini seguenti:

- Nuotatori;
- Persone coi capelli castani;
- Italiani.

Ragionamento:

L'intersezione tra i tre insiemi è non vuota, e.g. Thomas Ceccon appartiene a tutti e tre. Tuttavia esistono nuotatori italiani che non hanno capelli castani, nuotatori che hanno i capelli castani e non sono italiani, e italiani coi capelli castani che non sono nuotatori. Inoltre, esistono anche nuotatori che non hanno i capelli castani e non sono italiani, italiani che non hanno i capelli castani e non sono nuotatori e persone coi capelli castani che non sono italiane e non nuotano. ◀

Concludiamo quindi che

Soluzione:

il diagramma [C] rappresenta la relazione tra questi insiemi. ■

Quesito 1.1.3:

Facendo riferimento ai diagrammi del Quesito 1.1.1, individuare quale soddisfa la relazione insiemistica esistente fra i termini seguenti:

- numeri naturali multipli di 5
- numeri naturali multipli di 10
- numeri naturali multipli di 11

Ragionamento:

Se indichiamo con M_5 l'insieme dei multipli di 5, con M_{10} l'insieme dei multipli di 10 e con M_{11} l'insieme dei multipli di 11, abbiamo che

$$M_5 = \{x \mid x = 5n \text{ per qualche } n \in \mathbb{N}\} = \{5, 10, 15, 20, 25, \dots\},$$

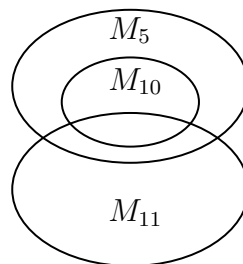
$$M_{10} = \{x \mid x = 10n \text{ per qualche } n \in \mathbb{N}\} = \{10, 20, 30, 40, \dots\}, \text{ e}$$

$$M_{11} = \{x \mid x = 11n \text{ per qualche } n \in \mathbb{N}\} = \{11, 22, 33, 44, 55, \dots\}.$$

Se $x = 10n$ (x è un multiplo di 10), possiamo scomporre il 10 e otteniamo che $x = 5 \cdot 2n$. Quindi x può essere riscritto come $x = 5n'$ con $n' = 2n$, i.e. x è anche un multiplo di 5. Abbiamo dimostrato che $M_{10} \subseteq M_5$. Lo stesso modo di ragionare non può essere esteso a M_{11} in quanto $MCD(5, 11) = MCD(10, 11) = 1$. Se m è un multiplo di 5, abbiamo che x' definito come $x' = 11m$ è sia un multiplo di 11, che un multiplo di 5, i.e. $M_{11} \cap M_5 \neq \emptyset$, dove \emptyset denota l'**insieme vuoto**. Lo stesso vale per M_{10} ($M_{11} \cap M_{10} \neq \emptyset$). ◀

Soluzione:

Possiamo concludere che il diagramma [E] rappresenta le relazioni tra gli insiemi M_5 , M_{10} e M_{11} .



1.2 Cardinalità

Quesito 1.2.1:

Al Club di Arti Visive sono iscritti 65 soci. Di questi, 34 partecipano al corso di scultura e 45 al corso di disegno e pittura. Ogni socio partecipa ad almeno uno dei due corsi. Quanti soci frequentano entrambi i corsi?

[A] 65 [B] 79 [C] 4 [D] 10 [E] 14

Terminologia e Notazione:

Il numero degli elementi di un insieme si chiama **cardinalità** e, considerando un generico insieme A , la sua cardinalità si indica con $|A|$. ◀

Ragionamento:

Indichiamo con C l'insieme dei soci del club, con S l'insieme dei soci che frequentano il corso di scultura e con D l'insieme dei soci che frequentano il corso di disegno e pittura.

I dati del quesito ci dicono che:

- $|C| = 65$;
- $|S| = 34$;
- $|D| = 45$;
- $S \cup D = C$, poiché ogni socio partecipa ad almeno uno dei due corsi.

Il quesito chiede di determinare la cardinalità dell'insieme $S \cap D$, cioè il numero di soci che frequentano entrambi i corsi.

Dal principio di inclusione–esclusione per due insiemi si ha:

$$|S \cap D| = |S| + |D| - |S \cup D|.$$

Soluzione:

Sostituendo i valori numerici otteniamo

$$|S \cap D| = 34 + 45 - 65 = 14.$$

La risposta corretta è quindi l'opzione [E]. ■

Teoria 1.2.1: Il principio di inclusione ed esclusione

La formula sulle cardinalità appena richiamata deriva dal **principio di inclusione-esclusione** che consente di determinare il numero di elementi dell'unione di più insiemi generici. Se due insiemi A e B hanno elementi in comune, semplicemente sommando il numero di elementi in ciascun di essi, conteremmo due volte gli elementi che si trovano nella loro intersezione. Di conseguenza

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Con tre insiemi vale che

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Quesito 1.2.2:

In un'azienda, i dipendenti sono stati assegnati a tre progetti, rispettivamente composti da 7, 11 e 13 persone. 7 dipendenti lavorano a un solo progetto, mentre 6 partecipano contemporaneamente a due progetti. Quanti dipendenti lavorano a tutti e tre i progetti?

[A] 3 [B] 5 [C] 4 [D] 6 [E] 8

Ragionamento:

Sia A l'insieme dei dipendenti che lavorano al primo progetto, B l'insieme dei dipendenti che lavorano al secondo progetto e C l'insieme dei dipendenti che lavorano al terzo progetto.

Dai dati del quesito sappiamo che:

- $|A| = 7$, $|B| = 11$, $|C| = 13$;
- 7 dipendenti lavorano a un solo progetto;
- 6 dipendenti lavorano esattamente a due progetti.

Per chiarire il problema, rappresentiamo graficamente la situazione con un diagramma di Venn (Figura 1.1). Indichiamo con R l'insieme dei dipendenti che lavorano a un solo progetto (regione rosa) e con G l'insieme dei dipendenti che lavorano a esattamente due progetti (regione gialla). ◀

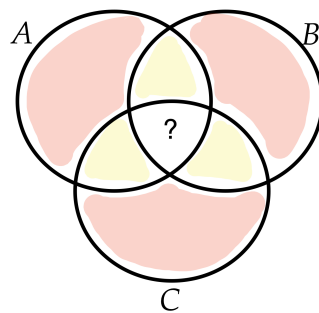


Figura 1.1: Rappresentazione grafica degli insiemi considerati nei dati del Quesito

L'insieme che ci interessa corrisponde alla parte rosa e di seguito lo indicheremo con R .

Terminologia e Notazione:

Il simbolo \setminus rappresenta la **differenza** tra insiemi e permette di escludere dall'insieme che si trova a sinistra di \setminus , e.g. A , gli elementi dell'insieme che si trovano alla sua destra, e.g. $(B \cup C)$. In simboli $A \setminus (B \cup C) = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin (B \cup C)\}$. In questo caso l'insieme $A \setminus (B \cup C)$ è stato definito per proprietà caratteristica e il linguaggio formale tra le parentesi graffe si legge "gli x tali che x appartiene ad A e non appartiene a B unito C ".

Torniamo al Quesito.

Ragionamento: Continua

Sappiamo dunque che

$$|R| = |(A \setminus (B \cup C)) \cup (B \setminus (A \cup C)) \cup (C \setminus (A \cup B))| = 7.$$

Sappiamo anche che il numero di dipendenti che lavorano a esattamente due progetti è 6, i.e. $|((A \cap B) \setminus C) \cup ((B \cap C) \setminus A) \cup ((A \cap C) \setminus B)| = 6$. Nella figura 1.1, questo insieme corrisponde alla parte gialla e di seguito lo indicheremo con G . Il quesito ci chiede di calcolare la cardinalità dell'insieme $A \cap B \cap C$, i.e. la cardinalità, in figura 1.1, della parte bianca contrassegnata con "?".

Ogni dipendente che lavora a un solo progetto contribuisce con 1 al totale $|A| + |B| + |C|$, ogni dipendente che lavora a due progetti contribuisce con 2, mentre ciascun dipendente che lavora a tutti e tre i progetti contribuisce con 3.

Di conseguenza:

$$|A| + |B| + |C| = |R| + 2|G| + 3|A \cap B \cap C|.$$

Sostituendo i valori noti otteniamo:

$$7 + 11 + 13 = 7 + 2 \cdot 6 + 3|A \cap B \cap C|.$$

Da cui:

$$31 = 19 + 3|A \cap B \cap C| \Rightarrow |A \cap B \cap C| = 4.$$

Soluzione:

La risposta corretta è l'opzione [C].

1.3 Relazioni

Quesito 1.3.1:

I coniugi Rossi hanno un figlio, una figlia, e sono bisnonni. Ciascuna delle loro discendenti femmine ha due figlie femmine e un figlio maschio. Ciascuno dei loro discendenti maschi ha una figlia femmina e un figlio maschio. Tutti i discendenti dei coniugi Rossi sono vivi. Quanti pronipoti maschi hanno i coniugi Rossi?

- [A] 3 [B] 4 [C] 5 [D] 6 [E] 7

Ragionamento:

Per risolvere questo quesito è opportuno rappresentare i dati utilizzando un *diagramma ad albero* come quello della Figura 1.2. ◀

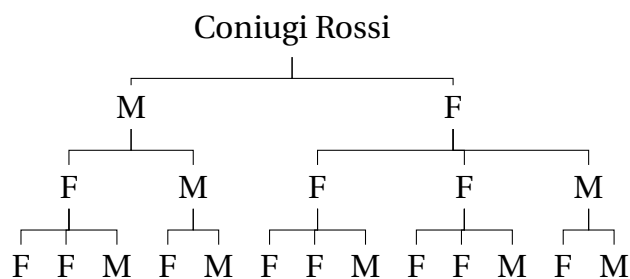


Figura 1.2: Albero genealogico della famiglia Rossi

Soluzione:

Segue immediatamente che la risposta corretta è 5 (opzione [C]). ■

Quesito 1.3.2:

Matteo non ha fratelli maschi. Chi è il fratello della figlia del nonno paterno della figlia di Matteo?

- [A] Lo zio di Matteo
- [B] Un cugino di Matteo
- [C] Matteo stesso
- [D] Il padre di Matteo
- [E] Tale persona non esiste

Come con il Quesito precedente, è opportuno dare una rappresentazione grafica dei dati utilizzando un diagramma ad albero come nella Figura 1.3.

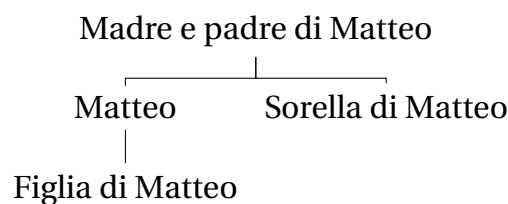


Figura 1.3: Albero genealogico di Matteo

Ragionamento:

Per poter realizzare tale grafico, è opportuno analizzare, pezzo per pezzo, tutti i dati del quesito. Il primo dato ci dice che Matteo non ha fratelli maschi, tuttavia non è escluso che abbia delle sorelle. Inoltre il nonno paterno della figlia di Matteo, è il padre di Matteo. Infatti, il nonno paterno della figlia di Matteo, è il padre del padre della figlia, ovvero padre di Matteo. La figlia del padre di Matteo è la sorella di Matteo, e suo fratello è Matteo stesso. ◀

Soluzione:

La risposta corretta al quesito è l'opzione [C]. ■

Quesito 1.3.3:

Dante ha tre sorelle, Alice, Bianca ed Elisabetta, e due fratelli, Cosimo e Federico. Si sa che:

1. Federico è il maggiore di tutti;
2. Cosimo è più grande di Alice;
3. Cosimo è più grande di Bianca;
4. Cosimo è più piccolo di Dante;
5. Cosimo è più piccolo di Elisabetta;

In base alle informazioni precedenti è FALSO affermare che:

- [A] Dante è più grande di Alice
- [B] Bianca è più piccola di Elisabetta
- [C] Elisabetta è più grande di Alice
- [D] Alice non può essere la seconda in ordine di età
- [E] Elisabetta non può essere terza

Terminologia e Notazione:

Per confrontare gli elementi di un insieme introduciamo una **relazione**. Scriveremo $x \longrightarrow y$ e leggeremo: x è *più piccolo di* y . ◀

Ragionamento:

Il quesito ci chiede di confrontare gli elementi dell'insieme

$$S = \{Dante, Alice, Bianca, Elisabetta, Cosimo, Federico\},$$

che abbrevieremo in $S = \{A, B, C, D, E, F\}$ dove le lettere corrispondono alle iniziali dei nomi.

I confronti presenti nei dati del problema diventano quindi:

- [A] Dante è più grande di Alice: $A \longrightarrow D$
- [B] Bianca è più piccola di Elisabetta: $B \longrightarrow E$
- [C] Elisabetta è più grande di Alice: $A \longrightarrow E$

Abbiamo poi dati che esprimono condizioni restrittive sulle altre possibili relazioni di età: [D]: Alice non può essere la seconda in ordine di età, ed [E] Elisabetta non può essere terza. ◀

Per farlo abbiamo bisogno di alcune proprietà delle relazioni.

Teoria 1.3.1: Relazione riflessiva

Una relazione R su un insieme A si dice

riflessiva se ogni elemento di A è in relazione con se stesso (per ogni $a \in A$, $(a, a) \in R$);

antiriflessiva se nessun elemento di A è in relazione con se stesso (per ogni $a \in A$, $(a, a) \notin R$);

non riflessiva se non è né riflessiva né antiriflessiva (esiste $a \in A$ tale che $(a, a) \notin R$ ed esiste $a \in A$ tale che $(a, a) \in R$).

Nel contesto del Quesito, abbiamo che nessun fratello è più piccolo di se stesso. La relazione è dunque antiriflessiva.

Teoria 1.3.2: Relazione simmetrica

Una relazione R definita su un insieme A si dice

simmetrica se per ogni $a, b \in A$, se $(a, b) \in R$ allora $(b, a) \in R$.

antisimmetrica se per ogni $a, b \in A$ tali che $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$ implica $a = b$; oppure, in modo equivalente, se $(a, b) \in R$ e $a \neq b$, allora $(b, a) \notin R$.

non simmetrica se non è simmetrica né antisimmetrica.

Nel contesto del Quesito abbiamo che se il fratello (o sorella) x è più piccolo del fratello (o sorella) y e non sono la stessa persona ($x \neq y$), allora y non è più piccolo di x . Nel grafo, l'antisimmetrica è caratterizzata dalla monodirezionalità delle frecce.

Teoria 1.3.3: Relazione transitiva

Una relazione R definita su un insieme A si dice

transitiva se per ogni $a, b, c \in A$, se $(a, b), (b, c) \in R$, allora $(a, c) \in R$;

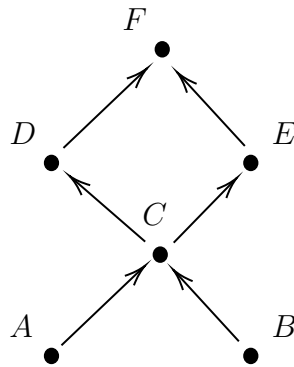
antitransitiva se per ogni $a, b, c \in A$, se $(a, b), (b, c) \in R$, allora $(c, a) \in R$;

non transitiva se esistono $a, b, c \in A$ tali che $(a, b), (b, c) \in R$, ma $(a, c) \notin R$;

Nel contesto del Quesito, se un fratello x è più piccolo del fratello y e il fratello y è più piccolo del fratello z , allora x è più piccolo di z . Nel grafo diretto la transitività è caratterizzata dalla **chiusura per frecce**: se esiste una freccia dal nodo x al nodo y ed una freccia dal nodo y al nodo z , allora esiste anche la freccia dal nodo x al nodo z .

Ragionamento: (continua)

Omettendo le frecce che si possono ottenere per transitività i dati del problema sono rappresentati graficamente come segue



Analizziamo ora le varie opzioni date nel quesito per trovare quella falsa.

- [A] Siccome $A \rightarrow C$ (dato (2)) e $C \rightarrow D$ (dato (4)), per transitività segue che $A \rightarrow D$, i.e. Alice è più piccola di Dante o, in modo equivalente, Dante è più grande di Alice. Quindi, [A] è vera.
- [B] Siccome $B \rightarrow C$ (dato (3)) e $C \rightarrow E$ (dato (5)), per transitività segue che $B \rightarrow E$, i.e. Bianca è più piccola di Elisabetta e [B] è vera.
- [C] Siccome $A \rightarrow C$ e $C \rightarrow E$, per transitività $A \rightarrow E$, i.e. Elisabetta è più grande di Alice. Segue che [C] è vera.
- [D] Dai dati sappiamo che $A \rightarrow C$ e $B \rightarrow C$, tuttavia non abbiamo informazioni sul rapporto tra A e B . Le configurazioni compatibili sono $A \rightarrow B \rightarrow C$ e $B \rightarrow A \rightarrow C$. È quindi possibile che Alice sia la seconda in ordine di età e la risposta al quesito è l'opzione [D].
- [E] Dai dati segue che il terzo in ordine di età è Cosimo mentre Elisabetta è quarta o quinta.



Dunque

Soluzione:

L'opzione [D] è quella corretta.

Teoria 1.3.4: Prodotto cartesiano

Nel contesto del Quesito 1.3, considerando l'insieme $S = \{A, B, C, D, E, F\}$, definiamo il prodotto cartesiano $S \times S$.

$$\begin{aligned} S \times S &= \{(x, y) \mid x \in S \text{ e } y \in S\} \\ &= \{(A, A), (A, B), (A, C), (A, D), (A, E), (A, F), \\ &\quad (B, A), (B, B), (B, C), \dots, (F, D), (F, E), (F, F)\} \end{aligned}$$

La relazione *essere più piccolo di*, che indichiamo con P , è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $S \times S$. Dai dati del quesito ricaviamo che

$$P = \{(A, F), (B, F), (C, F), (D, F), (E, F), (A, C), (B, C), (C, D), (C, E)\}.$$

Se rappresentiamo il prodotto cartesiano $S \times S$ con una tabella, i dati del quesito individuano le coppie — ossia le celle della tabella — che appartengono alla relazione P .

Considerando la numerazione dei dati proposta nel quesito, il primo dato, *Federico è il maggiore di tutti*, individua le coppie

$$(A, F), (B, F), (C, F), (D, F), (E, F),$$

che nella tabella sono contrassegnate con x_1 . Il secondo dato, *Cosimo è più grande di Alice*, individua invece la coppia (A, C) , contrassegnata nella tabella con x_2 , e così via.

P	A	B	C	D	E	F
A			x_2			x_1
B			x_3			x_1
C				x_4	x_5	x_1
D						x_1
E						x_1
F						

2 Quesiti risolvibili con la logica Booleana

Discutiamo qui dei quesiti che possono essere impostati e risolti attraverso il metodo delle cosiddette *tavole di verità* dei connettivi logici principali:

Simbolo	Lettura in italiano
\neg	non (è vero che)
\wedge	e/ma
\vee	oppure
\rightarrow	se... allora
\leftrightarrow	se e solo se

2.1	Deduzioni con connettivi Booleani	20
2.2	Deduzioni con condizioni necessarie e sufficienti . .	36
2.3	Deduzioni con negazioni .	44
2.4	Deduzioni con possibile, certo, necessario	51

Il metodo prevede il seguente schema generale

1. Traduzione del quesito e delle opzioni nel linguaggio della logica Booleana
2. Identificazione delle situazioni logicamente possibili
3. Identificazione dei dati del problema attraverso l'eliminazione delle situazioni logicamente incompatibili con essi.

2.1 Deduzioni con connettivi Booleani

Quesito 2.1.1: (IMPLICAZIONE, NEGAZIONE)

Se Andrea studia con impegno, allora ottiene buoni voti. Dato che la proposizione precedente è vera, quale delle seguenti affermazioni è certamente falsa?

- [A] Se Andrea ottiene buoni voti, allora ha studiato con impegno
- [B] Se Andrea non ottiene buoni voti, allora non ha studiato con impegno
- [C] Andrea ha studiato con impegno ma non ha ottenuto buoni voti
- [D] Se Andrea non studia con impegno, allora non ottiene buoni voti

Terminologia e Notazione:

La proposizione su cui è centrato il quesito è

$$\text{Se } \underbrace{\text{Andrea studia con impegno}}_{\text{antecedente}}, \text{ allora } \underbrace{\text{ottiene buoni voti}}_{\text{conseguente}}. \quad (2.1)$$

Notiamo immediatamente che ha la forma di un'**implicazione**, e quindi ha due componenti, anch'esse proposizioni. L'**antecedente** (Andrea studia con impegno) è introdotto da "Se", mentre il **conseguente** (ottiene buoni voti) è introdotto da "allora".

Capire il quesito:

Per rispondere correttamente al quesito è necessario fugare un'ambiguità frequente. La domanda *non* ci chiede di stabilire la verità o falsità dell'antecedente e del conseguente che compongono la proposizione (2.1). Nessun metodo logico porta a questo tipo di risposta. Ciò che ci viene richiesto dal quesito è *identificare tutte le situazioni logicamente possibili* e valutare, alla luce di queste e dei dati del problema, qual è la risposta corretta.

Per identificare senza ambiguità le situazioni logicamente possibili è necessario fare un'ipotesi metodologica:

Teoria 2.1.1: Principio di bivalenza

Una qualsiasi proposizione della logica Booleana è o vera o falsa (ma non entrambe).

Ragionamento:

Impostare la risoluzione del Quesito con la logica Booleana significa quindi assumere che l'antecedente e il conseguente della proposizione (2.1) possono essere o veri o falsi. Questo significa che le domande:

- l'antecedente è vero?
- il conseguente è vero?

ammettono (e richiedono) soltanto Sì oppure No come risposta.

Otteniamo così quattro **situazioni logicamente distinguibili**, descritte nella Tabella 2.1. Notate il ruolo fondamentale dell'ipotesi teorica di **Principio di bivalenza** secondo cui (i) le risposte sono soltanto Sì o No e (ii) tutte le domande ottengono una risposta. ◀

Situazione	Studia con impegno?	Ottiene buoni voti?
s_1	Sì	Sì
s_2	Sì	No
s_3	No	Sì
s_4	No	No

Tabella 2.1: Se ci facciamo due domande che ammettono risposta binaria, descriviamo quattro situazioni logicamente distinguibili.

Ragionamento: (continua)

Ora che abbiamo inquadrato la proposizione centrale al Quesito nella logica Booleana, abbiamo bisogno di sapere cosa significa dire che la proposizione (2.1) è vera. ▶

Teoria 2.1.2: Condizioni di verità dell'implicazione Booleana

Nella logica Booleana l'implicazione è falsa soltanto nel caso in cui l'antecedente è vero e il conseguente è falso. In tutti gli altri casi l'implicazione è vera (e per l'ipotesi di bivalenza, non si danno altre possibilità).

Ragionamento: (conclusione)

Si osserva immediatamente dalla Tabella 2.1 che la situazione s_2 è l'unica in cui si risponde Sì alla domanda se l'antecedente è vero e No alla domanda se il conseguente è vero. In altre parole, s_2 è l'unica situazione logicamente possibile in cui la proposizione (2.1) è falsa. ▶

Soluzione:

La soluzione al quesito è dunque [C]. ■

Notate che abbiamo risolto il Quesito senza far uso di alcuna notazione logica. Si tratta di una buona notizia: non è necessario usare simboli e formalizzazioni astratte per ragionare bene! Tuttavia, i passi che portano alla soluzione sono più immediatamente apprezzabili se facciamo uso delle abbreviazioni tipicamente in uso nella logica Booleana, che descriviamo nella nota Pratica 2.1.1. Si tratta di strumenti che vi permetteranno, una volta consolidati, di impostare e risolvere molto efficacemente

questo tipo di quesito, oltre a prepararvi allo studio più dettagliato e approfondito della logica.

Pratica 2.1.1: Tavole di verità

In logica Booleana è possibile abbreviare la Tabella 2.1 costruendo una cosiddetta **tavola di verità**:

1. Abbreviamo opportunamente antecedente e conseguente:
 - S : Andrea studia con impegno
 - B : Andrea ottiene buoni voti
2. Scriviamo 1 per rispondere “Sì” alla domanda se S è vero
3. Scriviamo 0 per rispondere “No” alla domanda se B è vero.

Il risultato è descritto nella Tabella 2.2 che *definisce il significato dell'implicazione Booleana*, basandosi sulle **Condizioni di verità dell'implicazione Booleana** (Teoria 2.1.2, pag. 21).

situazione	antecedente S	conseguente B	implicazione $S \rightarrow B$
s_1	1	1	1
s_2	1	0	0
s_3	0	1	1
s_4	0	0	1

Tabella 2.2: La definizione dell'implicazione Booleana mediante tavola di verità.

Ragionamento: Impostiamo il Quesito 2.1.1 con le tavole di verità

Usiamo la Tabella 2.2 per analizzare i dati del Quesito. Ricordate che i dati corrispondono al fatto che la proposizione (2.1) è vera. L'unica situazione **logicamente incompatibile** con questo dato è la s_2 , che esprime la proposizione

$\underbrace{\text{Andrea studia con impegno}}_{\text{antecedente valutato in 1}}, \text{ ma } \underbrace{\text{non ottiene buoni voti}}_{\text{conseguente valutato in 0}},$

che dunque esprime la **negazione** della proposizione (2.1). ◀

Soluzione: Mediante tavola di verità

La risposta corretta è la [C]. ■

Teoria 2.1.3: I dati escludono situazioni logicamente possibili

Ragionando a ritroso, partiamo osservando che l'antecedente e il conseguente danno luogo alle quattro situazioni logiche descritte dalla Tabella 2.1. Il dato del problema è che l'implicazione è vera. Dunque il dato del problema si esprime dicendo che la **situazione 2** è da escludere dalle possibilità in quanto *logicamente incompatibile* con i dati.

Pratica 2.1.2: Come si leggono correttamente le tavole di verità: righe

Notate che l'interpretazione della Tabella 2.1 prevede che leggete una "e" tra le risposte. Detto altrimenti, le informazioni descritte da una situazione logica sono costituite da una risposta (Sì o No) *a tutte* le domande rilevanti, che in questo caso sono due.

Dovete leggere analogamente la Tabella 2.2 e tutte le tavole di verità.

Notate anche che l'alternativa (3) formula la congiunzione in modo avversativo con "ma". Questo veicola una connotazione avversativa assente dalla congiunzione "e", usata per risolvere il quesito. Vi daremo più dettagli su come orientarvi in questi casi nella Parte II del volume.

Esercizio 1

Spiegare perché le risposte [A], [B] e [D] non sono corrette.

Quesito 2.1.2: (CONGIUNZIONE, NEGAZIONE)

Andrea studia con impegno e ottiene buoni voti. Dato che la proposizione precedente è falsa, quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?

- [A] Andrea ha studiato con impegno ma non ha ottenuto buoni voti
- [B] Andrea non ha studiato con impegno oppure non ha ottenuto buoni voti
- [C] Andrea ha studiato con impegno e ha ottenuto buoni voti
- [D] Andrea ha ottenuto buoni voti

Terminologia e Notazione:

Il quesito 2.1.2 è incentrato sulla proposizione *Andrea studia con impegno e ottiene buoni voti*. Poiché ha la forma di una **congiunzione** la rappresentiamo con

$$S \wedge B,$$

che ad alta voce leggiamo "S e B". Seguendo lo schema di abbreviazione descritto nella Pratica 2.1.1, abbreviamo i due **coniunti** come nel Quesito 2.1.1:

- S : “Andrea studia con impegno”;
- B : “Andrea ottiene buoni voti”.

Capire il quesito:

Prima di ragionare sul quesito, abbiamo bisogno di sapere cosa significa dire che una congiunzione Booleana è vera.

Teoria 2.1.4: Le condizioni di verità della congiunzione Booleana

Nella logica Booleana una congiunzione è vera nelle situazioni in cui entrambi i congiunti sono veri e falsa in tutte le altre.

Otteniamo così la Tabella 2.3.

	S	B	$S \wedge B$
s_1	1	1	1
s_2	1	0	0
s_3	0	1	0
s_4	0	0	0

Tabella 2.3: La definizione della congiunzione Booleana.

Ragionamento:

I dati del quesito ci dicono: *è falso che Andrea studia con impegno e ottiene buoni voti*. Dunque s_1 è l'unica situazione logicamente incompatibile con i dati, e deve essere depennata.

Nelle tre situazioni rimanenti almeno uno dei due congiunti è falso. In particolare:

- s_2 esprime (come già osservato nel Quesito 2.1.1) la situazione in cui Andrea ha studiato con impegno senza tuttavia ottenere buoni voti;
- s_3 esprime la situazione in cui Andrea, pur non avendo studiato con impegno, ha tuttavia conseguito buoni voti;
- s_4 esprime la situazione in cui Andrea, non ha studiato con impegno e non ha conseguito buoni voti.

Dunque vale la seguente **disgiunzione**:

- o non è vero che Andrea ha studiato con impegno
- oppure non è vero che Andrea ha ottenuto buoni voti.

Da questo segue

Soluzione:

La risposta corretta al quesito è la [B].

Esercizio 2

Spiegare perché le risposte [A], [C] e [D] non sono corrette.

Teoria 2.1.5: L'implicazione Booleana non è simmetrica

Avrete notato un'importante asimmetria tra la proposizione oggetto del Quesito 2.1.1 e del Quesito 2.1.2. Nel primo caso distinguiamo tra le due proposizioni che compongono l'implicazione, chiamandone una *antecedente* e l'altra *conseguente*. Nel caso della congiunzione non c'è necessità di una distinzione simile, e ci riferiamo simmetricamente ai *congiunti* per riferirci alle proposizioni che compongono la congiunzione. Si può osservare la differenza immediatamente confrontando le situazioni s_2 ed s_3 nella Tabella 2.2. Mentre la prima rende falsa $S \rightarrow B$ e vera la **conversa** $B \rightarrow S$, s_3 rende falsa $B \rightarrow S$ e rende vera la **conversa** $B \rightarrow S$. Per saperne di più, leggete la Sezione 8.2.3.

Quesito 2.1.3: (DISGIUNZIONE, NEGAZIONE)

Andrea studia con impegno oppure ottiene buoni voti. Dato che la proposizione precedente è vera, quale delle seguenti affermazioni è certamente falsa?

- [A] Andrea ha studiato con impegno e ha ottenuto buoni voti
- [B] Andrea non ha studiato con impegno e non ha ottenuto buoni voti
- [C] Andrea ha studiato con impegno oppure ha ottenuto buoni voti
- [D] Andrea ha studiato con impegno ma non ha ottenuto buoni voti

Terminologia e Notazione:


Il quesito 2.1.3 è incentrato sulla proposizione *Andrea studia con impegno oppure ottiene buoni voti*. Poiché ha la forma di una **disgiunzione** la rappresentiamo con

$$S \vee B,$$

che ad alta voce leggiamo “S o(ppure) B”, dove i due **disgiunti** sono abbreviati come nei quesiti precedenti:

- S : “Andrea studia con impegno”;
- B : “Andrea ottiene buoni voti”.

Capire il quesito:

Prima di ragionare sul quesito, abbiamo bisogno di accordarci sul criterio di verità per la disgiunzione Booleana. 

Teoria 2.1.6: Le condizioni di verità della disgiunzione Booleana

Nella logica Booleana una disgiunzione è falsa nella situazione in cui entrambi i disgiunti sono falsi e vera in tutte le altre – inclusa la situazione in cui i disgiunti sono entrambi veri.

Otteniamo così la Tabella 2.4.

	S	B	$S \vee B$
s_1	1	1	1
s_2	1	0	1
s_3	0	1	1
s_4	0	0	0

Tabella 2.4: La definizione della disgiunzione Booleana.

Ragionamento:

I dati del Quesito ci dicono: *è vero che Andrea studia con impegno oppure ottiene buoni voti*. Dunque la situazione s_4 è logicamente incompatibile con i dati e deve essere depennata.

Le tre situazioni rimanenti sono:

- s_1 : Andrea ha studiato con impegno e ha ottenuto buoni voti.
- s_2 : Andrea ha studiato con impegno ma non ha ottenuto buoni voti.
- s_3 : Andrea non ha studiato con impegno ma ha ottenuto buoni voti.

L'unica situazione logicamente esclusa è quella in cui **entrambi i disgiunti sono falsi**, cioè:

- Andrea non ha studiato con impegno *e*
- Andrea non ha ottenuto buoni voti.

Da questo segue: 

Soluzione:

La risposta corretta al quesito è la [B]. 

Esercizio 3

Spiegare perché le risposte [A], [C] e [D] non sono certamente false.

Quesito 2.1.4: (IMPLICAZIONE, DEDUZIONE)

Se Caterina nuota fino alla boa, i nonni sono in apprensione. Dato che la proposizione precedente è vera, segue che:

- [A] se i nonni sono in apprensione, allora Caterina sta nuotando fino alla boa
- [B] se i nonni non sono in apprensione, allora Caterina non sta nuotando fino alla boa
- [C] i nonni non sono in apprensione oppure Caterina nuota fino alla boa
- [D] se Caterina non nuota fino alla boa, allora i nonni non sono in apprensione
- [E] i nonni sono in apprensione

Capire il quesito:

Il quesito è incentrato su una proposizione che ha forma di implicazione. L'antecedente "Caterina nuota fino alla boa" si può abbreviare con C e il conseguente "i nonni sono in apprensione" si può abbreviare con N . La proposizione di interesse ("se Caterina nuota fino alla boa, i nonni sono in apprensione") è dunque abbreviata da $C \rightarrow N$ ed è definita dalla tavola di verità della Tabella 2.2 (dove sostituiamo opportunamente le lettere).

Il quesito ci chiede di identificare quale proposizione **segue** da $C \rightarrow N$. Per farlo dobbiamo definire il significato di "seguire da" in questo contesto. ◀

Teoria 2.1.7: Segue da (conseguenza logica)

In logica Booleana si dice che

- la proposizione Y segue dalla proposizione X se Y è vera in tutte le situazioni in cui X è vera.
- la proposizione Y non segue dalla proposizione X se esiste una situazione in cui X è vera e in cui Y è falsa.

Terminologia e Notazione:

Per valutare le opzioni del Quesito è necessario ragionare esplicitamente su un connettivo che abbiamo usato in precedenza solo in modo implicito: la **negazione**, che abbreviamo utilizzando il simbolo \neg . ◀

Teoria 2.1.8: Le condizioni di verità della negazione Booleana

In logica Booleana, la negazione di una proposizione vera è falsa, e viceversa, la negazione di una proposizione falsa è vera.

La definizione della negazione Booleana è visualizzabile considerando C (l'antecedente della proposizione di interesse nel quesito), come descritto dalla Tabella 2.5.

	C	$\neg C$
s_1	1	0
s_2	0	1

Tabella 2.5: La tavola di verità della negazione Booleana

Ragionamento:

I dati del quesito ci dicono che $C \rightarrow N$ è vera. Questo significa che la situazione s_2 è incompatibile con i dati.

	C	N	$C \rightarrow N$
s_1	1	1	1
s_2	1	0	0
s_3	0	1	1
s_4	0	0	1

Ometteremo quindi di riportarla nel seguito del ragionamento.

Procediamo ora considerando a turno tutte le alternative fornite dal quesito, partendo dalla consueta abbreviazione simbolica

- Abbreviamo con $N \rightarrow C$ la proposizione che esprime l'opzione [A]: “se i nonni sono in apprensione, allora Caterina sta nuotando fino alla boa”
- Abbreviamo con $\neg N \rightarrow \neg C$ la proposizione che esprime l'opzione [B]: “se i nonni non sono in apprensione, allora Caterina non sta nuotando fino alla boa”;
- Abbreviamo con $\neg N \vee C$ la proposizione che esprime l'opzione [C]: “i nonni non sono in apprensione oppure Caterina nuota fino alla boa”;
- Abbreviamo con $\neg N \vee \neg C$ la proposizione che esprime l'opzione [D] “se Caterina non nuota fino alla boa, allora i nonni non sono in apprensione”;

- Abbreviamo con $\neg C \rightarrow \neg N$ la proposizione che esprime l'opzione [E] “i nonni sono in apprensione”.

Ricordate che il nostro obiettivo è trovare l'opzione che segue da $C \rightarrow N$.

Ragionamento: Continua

Analizziamo quindi le opzioni considerando tutte le situazioni logiche compatibili con i dati, ovvero s_1, s_3, s_4 .

[A] $N \rightarrow C$ **non segue da** $C \rightarrow N$.

Notiamo infatti che la situazione s_3 rende vera la premessa (espressa dalla proposizione $C \rightarrow N$), ma rende falsa la conclusione (espressa da $N \rightarrow C$).

	C	N	$C \rightarrow N$	$N \rightarrow C$
s_1	1	1	1	1
s_3	0	1	1	0
s_4	0	0	1	1

[B] $\neg N \rightarrow \neg C$ **segue da** $C \rightarrow N$. Infatti, ogni situazione che rende $C \rightarrow N$ vera, rende vera anche $\neg N \rightarrow \neg C$.

	C	N	$C \rightarrow N$	$\neg N$	$\neg C$	$\neg N \rightarrow \neg C$
s_1	1	1	1	0	0	1
s_3	0	1	1	0	1	1
s_4	0	0	1	1	1	1

[C] $\neg N \vee C$ **non segue da** $C \rightarrow N$. Infatti s_3 rende vera la premessa $C \rightarrow N$ ma rende falsa la conclusione $\neg N \vee C$.

	C	N	$C \rightarrow N$	$\neg N$	$\neg N \vee C$
s_1	1	1	1	0	1
s_3	0	1	1	0	0
s_4	0	0	1	1	1

[D] $\neg C \rightarrow \neg N$ **non segue da** $C \rightarrow N$. Infatti s_3 rende vera $C \rightarrow N$, ma rende falsa $\neg C \rightarrow \neg N$.

	C	N	$C \rightarrow N$	$\neg C$	$\neg N$	$\neg C \rightarrow \neg N$
s_1	1	1	1	0	0	1
s_3	0	1	1	1	0	0
s_4	0	0	1	1	1	1

[E] N **non segue da** $C \rightarrow N$. Infatti, la situazione s_4 rende vera la premessa $C \rightarrow N$, ma rende falsa la conclusione N .

	C	N	$C \rightarrow N$
s_1	1	1	1
s_3	0	1	1
s_4	0	0	1

Da questo segue:

Soluzione:

L'opzione [B] è la risposta corretta

Pratica 2.1.3: Computazioni nelle tavole di verità

Notate che la regola usata per valutare $\neg N \rightarrow \neg C$ nella valutazione dell'opzione [B] è la stessa che useremmo per calcolare $N \rightarrow C$; ma invece di partire dalla verità o falsità di N e C partiamo dalla verità o falsità delle loro negazioni. Abbiamo reso questa cosa esplicita antepoendo alla valutazione di $\neg N \rightarrow \neg C$ la valutazione di $\neg N$ e di $\neg C$.

Pratica 2.1.4: Implicazione e deduzione

Vi starete chiedendo se, al di là delle parole, qual è la differenza tra

- $X \rightarrow Y$ e
- Y segue da X .

L'implicazione Booleana \rightarrow cattura il significato di “segue da” nel caso in cui abbia senso identificare le premesse di un argomento logico con l'antecedente di un'implicazione.

Questo si vede bene se invece di una singola proposizione X abbiamo più proposizioni, X_1, X_2, \dots, X_n . In questo caso diciamo che Y segue da X_1, X_2, \dots, X_n se Y è vera in tutte le situazioni che verificano *tutte* le proposizioni X_1, X_2, \dots, X_n .

Usualmente, nei quesiti si presenta proprio questa situazione: le proposizioni, X_1, X_2, \dots, X_n , esprimono in logica Booleana i dati del quesito, mentre Y esprime l'opzione corretta.

Quindi potete considerare l'implicazione e la deduzione come due espressioni del medesimo comportamento logico: false soltanto nel caso in cui l'antecedente (o la congiunzione di tutte le premesse) è vera e il conseguente o conclusione è falso.

Esercizio 4

Perché s_2 non compare in alcuna tabella nel ragionamento che porta alla soluzione del quesito?

Teoria 2.1.9: Equivalenza logica

Se considerate l'opzione [B] prendendo in considerazione tutte le situazioni possibili (quindi anche s_2) potrete osservare una cosa interessante. Non soltanto è vero che la conclusione $\neg N \rightarrow \neg C$ segue dalla premessa $C \rightarrow N$, ma vale anche il viceversa: $C \rightarrow N$ segue da $\neg N \rightarrow \neg C$. Le due proposizioni sono, come si dice, **logicamente equivalenti**, come avrete modo di approfondire nella Sezione 9.1.4.

Quesito 2.1.5: (DEDUZIONE CON TAVOLE DI VERITÀ)

Oggi la 2°C va in gita e il ritrovo per la partenza è alle ore 7.45. Come prevedibile, qualcuno ha fatto ritardo e il pullman è riuscito a partire solo alle 8.10. Se Teresa ha fatto tardi, anche Giulia ha fatto tardi e se Marco ha fatto tardi, così anche Anna. Almeno uno tra Teresa e Marco ha fatto tardi. Segue che:

- [A] Se Anna ha fatto tardi, allora Giulia è stata puntuale
- [B] Se Marco è stato puntuale, allora anche Anna lo è stata
- [C] Giulia ha fatto tardi e Anna è stata puntuale o Anna ha fatto tardi e Giulia è stata puntuale
- [D] Se Teresa è stata puntuale, anche Giulia lo è stata
- [E] Se Anna o Giulia hanno fatto tardi, allora Teresa o Marco hanno fatto tardi

Ragionamento:

Abbreviamo come segue:

T : “Teresa ha fatto tardi”;

G : “Giulia ha fatto tardi”;

M : “Marco ha fatto tardi”;

A : “Anna ha fatto tardi”.

Capire il quesito:

Tra le opzioni da cui dobbiamo scegliere compaiono sia persone che hanno fatto tardi, sia persone che sono state *puntuale*. Ai fini della risoluzione del quesito è appropriato assumere che essere *puntuale* sia la negazione di aver fatto tardi. Dunque alle abbreviazioni di sopra si aggiungono immediatamente le loro negazioni:

$\neg T$: “Teresa è stata puntuale” (cioè “Teresa non ha fatto tardi”);

- $\neg G$: “Giulia è stata puntuale”;
- $\neg M$: “Marco è stato puntuale”;
- $\neg A$: “Anna è stata puntuale”.

Terminologia e Notazione: Variabili proposizionali

Nel linguaggio logico le proposizioni T, G, M, A sopra sono chiamate **variabili proposizionali**. La loro caratteristica è che possono essere o vere o false (1, oppure 0).

Teoria 2.1.10: Lunghezza delle tavole di verità

Le quattro variabili proposizionali T, G, M, A danno luogo a 16 situazioni logicamente distinte. In generale, un problema che richiede n variabili proposizionali richiede una tavola di verità con 2^n righe.

Dunque, la tavola di verità che rappresenta tutte le situazioni logicamente possibili di interesse per il quesito è la seguente:

	T	G	M	A
s_1	1	1	1	1
s_2	1	1	1	0
s_3	1	1	0	1
s_4	1	1	0	0
s_5	1	0	1	1
s_6	1	0	1	0
s_7	1	0	0	1
s_8	1	0	0	0
s_9	0	1	1	1
s_{10}	0	1	1	0
s_{11}	0	1	0	1
s_{12}	0	1	0	0
s_{13}	0	0	1	1
s_{14}	0	0	1	0
s_{15}	0	0	0	1
s_{16}	0	0	0	0

Ragionamento: Continua

I dati del problema stabiliscono che le seguenti proposizioni sono vere:

- $T \rightarrow G$: “se Teresa ha fatto tardi, anche Giulia ha fatto tardi”
- $M \rightarrow A$: “se Marco ha fatto tardi, così anche Anna”
- $T \vee M$: “almeno uno tra Teresa e Marco ha fatto tardi”.

Procediamo quindi a depennare le situazioni *incompatibili* con i dati. Per farlo evidenziamo in **grigio chiaro** le situazioni incompatibili con $T \rightarrow G$, in

grigio medio le situazioni incompatibili con $M \rightarrow A$, e in **grigio scuro** le situazioni incompatibili con $T \vee M$.

	dati			[A]	[B]	[C]	[D]	[E]
	$T \rightarrow G$	$M \rightarrow A$	$T \vee M$	$A \rightarrow \neg G$	$\neg M \rightarrow \neg A$	$(G \wedge \neg A) \vee (A \wedge \neg G)$	$\neg T \rightarrow \neg G$	$(A \vee G) \rightarrow (T \vee M)$
s_1	1	1	1	1	1	0	0	1
s_5	0	1	1	0	1	1	0	1
s_6	0	0	1	1	1	0	0	1
s_7	0	1	1	0	1	1	0	1
s_8	0	1	1	1	0	0	0	1
s_2	1	0	1	1	1	0	0	1
s_3	1	1	1	1	1	0	0	1
s_4	1	1	1	1	0	0	0	1
s_9	1	1	1	1	1	0	0	1
s_{10}	1	0	1	1	1	0	0	1
s_{11}	1	1	0	1	1	0	1	0
s_{12}	1	1	0	1	0	0	1	0
s_{13}	1	1	1	0	1	1	1	1
s_{14}	1	0	1	1	1	0	1	1
s_{15}	1	1	0	0	1	1	1	0
s_{16}	1	1	0	1	0	0	1	1

Possiamo ora dimenticarci delle situazioni depennate e considerare soltanto quelle che verificano i dati.

	dati			[A]	[B]	[C]	[D]	[E]
	$T \rightarrow G$	$M \rightarrow A$	$T \vee M$	$A \rightarrow \neg G$	$\neg M \rightarrow \neg A$	$(G \wedge \neg A) \vee (A \wedge \neg G)$	$\neg T \rightarrow \neg G$	$(A \vee G) \rightarrow (T \vee M)$
s_1	1	1	1	1	1	0	0	1
s_3	1	1	1	1	1	0	0	1
s_4	1	1	1	1	0	0	0	1
s_9	1	1	1	1	1	0	0	1
s_{13}	1	1	1	0	1	1	1	1

Ricordate (Teoria 2.1.7, pag. 27) che una qualsiasi delle opzioni del quesito **non segue dai dati** se, nella colonna corrispondente all'opzione, troviamo uno 0.

Dunque è immediato osservare che:

- [A] **non segue** dai dati poiché s_{13} rende falsa $A \rightarrow \neg G$ (“se Anna ha fatto tardi, allora Giulia è stata puntuale”);
- [B] **non segue** dai dati poiché s_4 rende falsa $\neg M \rightarrow \neg A$ (“se Marco è stato puntuale, allora anche Anna lo è stata”);
- [C] **non segue** dai dati poiché s_1 (tra le altre) rende falsa $(G \wedge \neg A) \vee (A \wedge \neg G)$ (“Giulia ha fatto tardi e Anna è stata puntuale o Anna ha fatto tardi e Giulia è stata puntuale”);
- [D] **non segue** dai dati poiché s_1 (tra le altre) rende falsa $(\neg T \rightarrow \neg G)$ (“se Teresa è stata puntuale anche Giulia lo è stata”);
- [E] **segue** dai dati perché tutte le situazioni verificano (tutti) i dati, verificano anche $(A \vee G) \rightarrow (T \vee M)$ (“se Anna o Giulia hanno fatto tardi, allora Teresa o Marco hanno fatto tardi”).



Da questo segue

Soluzione:

La risposta corretta è la [E].

Pratica 2.1.5: Come scrivere le tavole di verità

Poiché è facile commettere errori, conviene scrivere le tavole di verità sempre nello stesso modo. Il metodo usato sopra consiste nel considerare le valutazioni in *ordine lessicografico inverso*:

- partiamo dalla valutazione che assegna 1 a tutte le variabili proposizionali: nel nostro caso si tratta del numero 1111;
- continuiamo con la valutazione che assegna a tutto 1 tranne che all'ultima variabile proposizionale: nel nostro caso otteniamo 1110;
- continuiamo con 1101. Si tratta del numero immediatamente più piccolo di 1110 se assumete che i numeri siano scrivibili soltanto con 0 e 1, cioè in codice binario;
- l'ultima situazione corrisponde a quella in cui tutte le variabili proposizionali sono valutate in 0.

Quando avete scritto la tavola di verità, controllate che il numero di situazioni sia sempre una potenza di 2. Se non è così significa che avete sbagliato qualcosa.

Quesito 2.1.6: (DEDUZIONE, CERTEZZA)

Mafalda scommette con Nora che se la sera del Palio l'Oca dovesse essere di rincorsa, la Giraffa vincerebbe. In quale dei seguenti casi si è certi che Mafalda perderebbe la scommessa?

- [A] L'Oca non è di rincorsa e la Giraffa perde
- [B] L'Oca è di rincorsa e la Giraffa vince
- [C] L'Oca non è di rincorsa e la Giraffa vince
- [D] Non si conosce chi è di rincorsa, ma la Giraffa perde
- [E] L'Oca è di rincorsa e la Giraffa perde

Ragionamento:

Abbreviamo come segue:

O : l'Oca è di rincorsa;

G : la Giraffa vince il Palio.

La scommessa può dunque essere espressa dall'implicazione

$$O \rightarrow G$$

.

Capire il quesito:

Per avere la **certezza** che Mafalda perda la scommessa, si deve verificare una situazione che renda falsa l'implicazione $O \rightarrow G$.

Terminologia e Notazione: Controesempio

Una situazione che verifica $O \wedge \neg G$ si chiama **controesempio** dell'implicazione $O \rightarrow G$.

Teoria 2.1.11: Un controesempio è sufficiente a invalidare una deduzione

È sufficiente identificare un controesempio per avere la certezza che una data implicazione non segua.

Ragionamento:

Abbreviare le opzioni del quesito è sufficiente a trovare il controesempio.

- [A] $\neg O \wedge \neg G$;
- [B] $O \wedge G$;
- [C] $\neg O \wedge G$;

[D] $(O \vee \neg O) \wedge \neg G$;

[E] $O \wedge \neg G$.

Da questo segue

Soluzione:

La risposta corretta è la [E].

Pratica 2.1.6: Ricerca del controesempio

In un quesito di questo tipo è utile ricercare attivamente il controesempio. Visto che uno sarà sufficiente a identificare la risposta corretta, non vale la pena analizzare nel dettaglio tutte le opzioni compilando tutta la tavola di verità.

Ricordate, nei test di ammissione come negli esami universitari, il tempo a disposizione è limitato, e così la vostra attenzione. Identificare un modo “economico” di procedere vi aiuta a ridurre la probabilità di errore.

2.2 Deduzioni con condizioni necessarie e sufficienti

Quesito 2.2.1: CONDIZIONI NECESSARIE, DEDUZIONE

Solo superando tutti gli esami e consegnando la tesi entro luglio sarà possibile laurearsi nell'anno in corso. Se la precedente affermazione è vera, allora è sicuramente vero che:

- [A] Se Sara ha superato gli esami e consegnato la tesi entro luglio allora si laurea nell'anno in corso
- [B] Se Sara si laurea nell'anno in corso, allora ha superato tutti gli esami e consegnato la tesi entro luglio
- [C] Se Sara non si laurea nell'anno in corso, allora non ha superato tutti gli esami oppure non ha consegnato la tesi entro luglio
- [D] Se Sara ha superato tutti gli esami e non si è laureata nell'anno in corso, allora vuol dire che non ha consegnato la tesi entro luglio
- [E] Non è possibile dedurre nulla con certezza

Terminologia e Notazione: Solo (se)

Si usa “solo” per esprimere **condizioni necessarie** (alla verità di una qualche proposizione). In logica Booleana le condizioni necessarie sono espresse mediante l'implicazione. ◀

Ragionamento:

I dati del quesito ci dicono che la proposizione

L : Sara potrà laurearsi nell'anno in corso

ha come condizione necessaria la congiunzione delle due proposizioni

S : Sara ha superato gli esami entro luglio

T : Sara ha consegnato la tesi entro luglio.

I dati del problema si esprimono assumendo che l'implicazione

$$L \rightarrow (S \wedge T) \quad (2.2)$$

è vera. ◀

Capire il quesito:

Il quesito chiede di identificare quale proposizione è deducibile dalla proposizione (2.2), cioè quale proposizione è vera in tutte le situazioni in cui la (2.2) lo è. ▶

Terminologia e Notazione: Implicazioni associate a un'implicazione data

Partendo da $L \rightarrow (S \wedge T)$ si identificano tre implicazioni a essa collegate:

1. $\neg(L \rightarrow (S \wedge T))$ esprime la **negazione di** $L \rightarrow (S \wedge T)$;
2. $(S \wedge T) \rightarrow L$ esprime l'implicazione **inversa** di $L \rightarrow (S \wedge T)$;
3. $\neg(S \wedge T) \rightarrow \neg L$ esprime l'implicazione **contrappositiva** (detta anche **contronominale**) di $L \rightarrow (S \wedge T)$. ◀

Teoria 2.2.1: Le implicazioni associate a un'implicazione data

I rapporti reciproci tra le tre implicazioni associate all'implicazione data sono immediatamente apprezzabili se le valutiamo una accanto all'altra.

	L	S	T	$L \rightarrow (S \wedge T)$	negazione $\neg(L \rightarrow (S \wedge T))$	inversa $(S \wedge T) \rightarrow L$	contronominale $\neg(S \wedge T) \rightarrow \neg L$
s_1	1	1	1	1	0	1	1
s_2	1	1	0	0	1	1	0
s_3	1	0	1	0	1	1	0
s_4	1	0	0	0	1	1	0
s_5	0	1	1	1	0	0	1
s_6	0	1	0	1	0	1	1
s_7	0	0	1	1	0	1	1
s_8	0	0	0	1	0	1	1

Si nota:

- Un'implicazione e la sua contronominale hanno la stessa tavola di verità, e dunque sono **logicamente equivalenti**: esprimono esattamente lo stesso contenuto logico;
- L'inversa non segue dall'implicazione data (e viceversa);
- L'inversa e la negazione di un'implicazione data non sono equivalenti.

Ragionamento:

Procediamo analizzando le opzioni del quesito nel linguaggio della logica Booleana. Si tratta della parte più impegnativa del ragionamento.

- [A] “Se Sara ha superato gli esami e consegnato la tesi entro luglio allora si laurea nell'anno in corso”. Si tratta dell'inversa dell'implicazione data: $(S \wedge T) \rightarrow L$. Come osservato sopra (Teoria 2.2.1, pag. 38) l'inversa **non segue** dall'implicazione data.
- [B] “Se Sara si laurea nell'anno in corso, allora ha superato tutti gli esami e consegnato la tesi entro luglio”: $L \rightarrow (S \wedge T)$. Si tratta dell'implicazione data, che certamente segue da sé stessa.
- [C] “Se Sara non si laurea nell'anno in corso, allora non ha superato tutti gli esami oppure non ha consegnato la tesi entro luglio”: $\neg L \rightarrow (\neg S \vee \neg T)$. Si tratta della contronominale dell'inversa, e dunque non segue (come [A]) dall'implicazione data.
- [D] “Se Sara ha superato tutti gli esami e non si è laureata nell'anno in corso, allora vuol dire che non ha consegnato la tesi entro luglio”: $(S \wedge \neg L) \rightarrow \neg T$.
- [E] Poiché abbiamo identificato l'opzione [B] come identica alla proposizione data, è possibile dedurre con certezza la sua verità.

Da questo segue

Soluzione:

La risposta corretta è [B].

Pratica 2.2.1: Le condizioni necessarie non sempre sono sufficienti

È opportuno fugare una fonte comune di errore. Indicare condizioni necessarie come $S \wedge T$ nel quesito, non significa averle indicate *tutte*. Questo, al di là delle computazioni Booleane, è il motivo per cui la [A] non è una risposta corretta al quesito. Infatti, è facile immaginare una situazione in cui Sara, pur avendo sostenuto gli esami e consegnato la tesi entro luglio, comunque non ha soddisfatto tutte le condizioni per potersi laureare entro l'anno. Per esempio, perché la sua relatrice non ha ritenuto la tesi di qualità adeguata.

Teoria 2.2.2: Espressioni che identificano l'implicazione

Il quesito mette in evidenza il rapporto tra

- equivalenza logica di proposizioni espresse nel linguaggio booleano – come ad esempio un'implicazione e la sua contronominale;
- sinonimia tra espressioni in italiano (o qualsiasi altro linguaggio comune) e identità della loro formulazione Booleana (la soluzione del quesito).

Per un uso privo di errori della logica Booleana è utile sapere che esistono molti sinonimi per *se A allora C*, tra cui:

1. A implica C;
2. C solo se A;
3. C se A;
4. C è necessario per A;
5. A è sufficiente per C;
6. C a condizione che A;
7. tutte le volte che A, allora C;
8. nel caso in cui A, allora C;
9. Affinché C, è sufficiente che A.

A questa lista si aggiungono poi tutte le implicazioni logicamente equivalenti ad $A \rightarrow C$. La lista è dunque *infinita*.

Quesito 2.2.2: CONDIZIONI SUFFICIENTI, DEDUZIONE

Vincere tutte le gare è sufficiente per vincere il campionato. Se la precedente affermazione è vera, allora è sicuramente vero che

- [A] Se si è vinto il campionato, allora si è vinto tutte le gare
- [B] Se non si è vinto il campionato, allora non si è vinto tutte le gare
- [C] Non si è vinto il campionato oppure si è vinto tutte le gare
- [D] Se non si è vinto tutte le gare allora non si è vinto il campionato
- [E] Si è vinto il campionato

Ragionamento:

Abbreviamo come segue:

- G : si sono vinte tutte le gare;
- C : si è vinto il campionato.

La proposizione oggetto del quesito si esprime in logica Booleana attraverso l'implicazione $G \rightarrow C$ (Teoria 2.2.2, pag. 39). Dunque i dati del quesito ci dicono che $G \rightarrow C$ è vera.

Le alternative si esprimono in logica Booleana, presentate come segue:

- [A] $C \rightarrow G$;
- [B] $\neg C \rightarrow \neg G$;
- [C] $\neg C \vee G$;
- [D] $\neg G \rightarrow \neg C$;
- [E] G .

Notiamo immediatamente che la [B] corrisponde nel linguaggio Booleano alla contrappositiva di $G \rightarrow C$, che sappiamo essere equivalente a essa (Teoria 2.2.1, pag. 21). Poiché hanno la stessa tavola di verità, la contrappositiva è verificata da tutte le situazioni che verificano $G \rightarrow C$ e dunque segue da essa. ◀

Soluzione:

La risposta corretta è [B]. ■

Pratica 2.2.2: Verificare la risposta con la tavola di verità

Abbiamo *dedotto* la risposta corretta da un risultato stabilito in precedenza. È tuttavia buona pratica verificare la correttezza della risposta con un ragionamento diretto. Per esempio attraverso una tavola di verità.

	C	$[E]$ G	<i>dati</i> $G \rightarrow C$	$[A]$ $C \rightarrow G$	$[B]$ $\neg C \rightarrow \neg G$	$[C]$ $\neg C \vee G$	$[D]$ $\neg G \rightarrow \neg C$
s_1	1	1	1	1	1	1	1
s_2	1	0	1	0	1	0	0
s_3	0	1	0	1	0	1	1
s_4	0	0	1	1	1	1	1

Tutte le situazioni che verificano i dati (s_1, s_2, s_4) verificano anche $\neg C \rightarrow \neg G$. Quindi, anche senza sapere che la contrappositiva è equivalente a (e quindi segue da) l'implicazione data, si può verificare che la risposta corretta è la [B].

Esercizio 5

Mostrare che le condizioni necessarie espresse da un'implicazione sono le condizioni sufficienti espresse dalla sua inversa

Quesito 2.2.3: CONDIZIONI NECESSARIE E SUFFICIENTI

Margherita andrà al mare se e solo se ci sarà il sole e riuscirà a finire di scrivere l'ultimo capitolo della tesi. Se la precedente affermazione è vera, allora è sicuramente vero che

- [A] Se Margherita non riuscirà a finire l'ultimo capitolo della tesi allora non andrà al mare
- [B] Se Margherita non andrà al mare allora o non c'è il sole o non è riuscita a finire l'ultimo capitolo della tesi
- [C] Se Margherita va al mare, allora vuol dire che c'è il sole
- [D] Tutte le precedenti
- [E] Soltanto due delle precedenti

Ragionamento:

Abbreviamo come segue

M : Margherita va al mare;

S : C'è il sole;

T : Margherita ha finito di scrivere l'ultimo capitolo della tesi.

I dati del quesito ci dicono che

$$(M \rightarrow (S \wedge T)) \wedge ((S \wedge T) \rightarrow M) \quad (2.3)$$

è vera. ▶

Terminologia e Notazione:

La congiunzione di un'implicazione e del suo inverso forma una **doppia implicazione** (detta anche **bi-implicazione**) che si denota con

$$M \leftrightarrow (S \wedge T).$$

La bi-implicazione esprime la compresenza di **condizioni necessarie e sufficienti**. ▶

Teoria 2.2.3: Doppia implicazione

Una doppia implicazione è vera esattamente quando antecedente e conseguente delle implicazioni che la compongono hanno lo stesso valore di verità: sono cioè entrambi veri ($A \wedge C$) oppure entrambi falsi ($\neg A \wedge \neg C$), come descritto dalla Tabella 2.6.

	A	C	$A \rightarrow C$	$C \rightarrow A$	$A \leftrightarrow C$
s_1	1	1	1	1	1
s_2	1	0	0	1	0
s_3	0	1	1	0	0
s_4	0	0	1	1	1

Tabella 2.6: Definizione della doppia implicazione Booleana

Ragionamento:

Iniziamo formulando nel linguaggio Booleano (per le altre ovviamente non c'è bisogno) le prime tre opzioni:

[A] : $\neg T \rightarrow \neg M$ Osservate che si tratta della contrappositiva di (e dunque logicamente equivalente a) $M \rightarrow T$;

[B] : $\neg M \rightarrow \neg S \vee \neg T$;

[C] : $M \rightarrow S$.

La tavola di verità *ridotta* alle sole situazioni che soddisfano i dati.

s_i	M	S	T	dati			
				$M \leftrightarrow (S \wedge T)$	$[A]$ $M \rightarrow T$	$[B]$ $\neg M \rightarrow \neg S \vee \neg T$	$[C]$ $M \rightarrow S$
s_1	1	1	1	1	1	1	1
s_6	0	1	0	1	1	1	1
s_7	0	0	1	1	1	1	1
s_8	0	0	0	1	1	1	1

Si nota immediatamente che le opzioni [A],[B],[C] sempre soddisfatte nelle situazioni che verificano i dati.

Dunque

Soluzione:

L'opzione [D] è quella corretta.

Pratica 2.2.3: Eliminazione dei connettivi

Si osservi che la doppia implicazione non è necessaria in logica Booleana. Può essere infatti definita dalla congiunzione di un'implicazione e del suo inverso (vedi 2.2.3, pag. 42).

Esercizio 6

Elaborare una tavola di verità completa per l'analisi delle opzioni (includendo cioè anche le quattro situazioni che non verificano i dati).

Esercizio 7*

Spiegare perché, pur non essendo logicamente equivalenti alla (2.2) né tra di loro, le opzioni [A], [B] e [C] hanno la stessa tavola di verità.

2.3 Deduzioni con negazioni

Quesito 2.3.1: (NEGAZIONE, IMPLICAZIONE)

Se non vado al compleanno di Cecilia, allora le compro un regalo. Quale delle seguenti affermazioni nega la proposizione iniziale?

- [A] Se vado al compleanno di Cecilia, allora non le compro un regalo
- [B] Non vado al compleanno di Cecilia oppure non le compro un regalo
- [C] Non vado al compleanno di Cecilia e non le compro un regalo
- [D] Vado al compleanno di Cecilia e non le compro un regalo
- [E] Non vado al compleanno di Cecilia e le compro un regalo

Ragionamento:

Abbreviamo come segue:

C : “vado al compleanno di Cecilia”;

R : “compro un regalo a Cecilia”.

Quindi $\neg C \rightarrow R$ esprime la proposizione “Se non vado al compleanno di Cecilia, allora le compro un regalo”.


Le opzioni del quesito si esprimono in logica Booleana come segue:

- [A] $\neg C \rightarrow \neg R$;
- [B] $\neg C \vee \neg R$;
- [C] $\neg C \wedge \neg R$;
- [D] $C \wedge \neg R$;
- [E] $\neg C \wedge R$.

Ricordate che un’implicazione Booleana è falsa esattamente quando l’antecedente è vero e il conseguente è falso (Teoria 2.1.2, pag. 21). 

Segue che

Soluzione:

l’opzione [C] è quella corretta. 

Quesito 2.3.2: (NEGAZIONE, CONGIUNZIONE)

Negare che “il libro è disponibile e lo prenderò in prestito” equivale a dire che:

- [A] Il libro non è disponibile e perciò non lo prenderò in prestito
- [B] Il libro non è disponibile e non lo prenderò in prestito
- [C] Il libro non è disponibile ma lo prenderò comunque in prestito
- [D] Il libro è disponibile ma non lo prenderò in prestito
- [E] O il libro non è disponibile o non lo prenderò in prestito

Ragionamento:

Abbreviamo come segue:

D : “il libro è disponibile”;

P : “prenderò il libro in prestito”.

Quindi, $D \wedge P$ esprime in logica Booleana la proposizione di interesse nel quesito: “Il libro è disponibile e lo prenderò in prestito”. Il quesito ci chiede di identificare il significato della sua negazione: $\neg(D \wedge P)$ tra le opzioni disponibili:

- [A] $\neg D \wedge \neg P$;
- [B] $\neg D \wedge P$;
- [C] $\neg D \wedge P$;
- [D] $D \wedge \neg P$;
- [E] $\neg D \vee \neg P$.

Attraverso la tavola di verità di $\neg(D \wedge P)$ si esprime il significato della negazione della congiunzione, ma non si identifica immediatamente la soluzione:

D	P	$D \wedge P$	$\neg(D \wedge P)$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

Analizzando la tavola, tuttavia, si osserva che negare $D \wedge P$ vuol dire negare *almeno uno tra* D e P . Tramite le tavole di verità possiamo dunque verificare che

$\neg(D \wedge P)$ è **logicamente equivalente** a $\neg D \vee \neg P$.

D	P	$D \wedge P$	$\neg(D \wedge P)$	$\neg D$	$\neg P$	$\neg D \vee \neg P$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

Dunque

Soluzione:

L'opzione corretta è la [E].

Pratica 2.3.1: Traduzione Booleana

Avrete notato che entrambe le opzioni [A] e [B] sono espresse in linguaggio Booleano come $\neg D \wedge \neg P$ pur avendo un significato molto diverso in italiano. La prima proposizione: “Il libro non è disponibile e perciò non lo prenderò in prestito” esprime un nesso causale tra $\neg D$ e $\neg P$. Il fatto che il libro non sia disponibile è il motivo per cui non lo prenderò in prestito. Questa relazione è completamente assente dalla congiunzione espressa (in italiano) dalla seconda opzione “Il libro non è disponibile e non lo prenderò in prestito”. Gli strumenti della logica Booleana, e in questo caso particolare la sua congiunzione, non permettono di cogliere questa differenza così importante. Potrete approfondire l'argomento nel [Capitolo 10](#).

Teoria 2.3.1: Equivalenze (o leggi) di De Morgan

Le seguenti equivalenze logiche sono dette **Leggi di De Morgan** ed esprimono il senso logico profondo della relazione tra congiunzione e disgiunzione che, in presenza della negazione, diventa **interdefinibilità**:

$$\begin{aligned}\neg(D \wedge P) &\equiv \neg D \vee \neg P, \\ \neg(D \vee P) &\equiv \neg D \wedge \neg P,\end{aligned}$$

dove \equiv è il simbolo che esprime l'equivalenza logica.

La prima equivalenza ci dice che per negare una congiunzione è necessario (e sufficiente) negare uno dei congiunti. La seconda equivalenza dice che per negare una disgiunzione è necessario (e sufficiente) negare entrambi i disgiunti. La dimostrazione delle equivalenze è immediatamente ricavabile dalla [Tabella 2.7](#).

Il [Capitolo 8](#) è dedicato ad approfondire il ruolo centrale delle identità di De Morgan, e più in generale, delle manipolazioni algebriche in logica.

	D	P	$\neg(D \wedge P)$	$\neg D \vee \neg P$	$\neg(D \vee P)$	$\neg D \wedge \neg P$
s_1	1	1	0	0	0	0
s_2	1	0	1	1	0	0
s_3	0	1	1	1	0	0
s_4	0	0	1	1	1	1

Tabella 2.7: Le equivalenze di De Morgan (caso Booleano)

Quesito 2.3.3: (NEGAZIONE, DISGIUNZIONE)

Negare che “Marco è infortunato oppure il campo non è agibile” equivale a dire che:

- [A] Marco è infortunato ma il campo non è agibile;
- [B] Marco non è infortunato e il campo non è agibile
- [C] O il campo è agibile o Marco non è infortunato
- [D] Marco non è infortunato ma il campo è agibile
- [E] O il campo non è agibile o Marco non è infortunato

Ragionamento:

Abbreviamo come segue:

I : “Marco è infortunato”;

A : “Il campo è agibile”.

La proposizione “Marco è infortunato oppure il campo non è agibile” si esprime in logica Booleana attraverso la disgiunzione $I \vee \neg A$.

Il quesito ci chiede di identificare la sua negazione tra le opzioni seguenti:

- [A] $I \wedge \neg A$;
- [B] $\neg I \wedge \neg A$;
- [C] $\neg I \vee A$;
- [D] $\neg I \wedge A$;
- [E] $\neg A \vee \neg I$.

Negare $I \vee \neg A$ equivale a dire che “Marco non è infortunato e non è vero che il campo non è agibile”. L'equivalenza è immediatamente deducibile dalla tavola di

verità:

I	A	$\neg A$	$I \vee \neg A$	$\neg(I \vee \neg A)$	$\neg I$	$\neg I \wedge A$
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	0

Dunque

Soluzione:

L'opzione [D] è quella corretta.

Pratica 2.3.2: Sostituzione

Un ragionamento alternativo a quello svolto mediante le tavole di verità consiste nell'applicare le equazioni di De Morgan (Teoria 2.3.1, pag. 46) alla proposizione di interesse.

Si nota tuttavia che la forma è diversa, poiché il secondo congiunto contiene una negazione ($\neg A$). Dunque l'applicazione dell'equivalenza rilevante di De Morgan è ottenuta per **sostituzione**:

$$\neg(I \vee \neg A) \equiv \neg I \wedge \neg \neg A \equiv \neg I \wedge A.$$

dove la seconda equivalenza è verificabile grazie alla tavola di verità della doppia negazione:

	A	si scambiano i valori di verità $\neg A$	si scambiano una seconda volta $\neg \neg A$
s_1	1	0	1
s_2	0	1	0

Quesito 2.3.4: (DISGIUNZIONE, DOPPIA IMPLICAZIONE)

Alla scuola dell'infanzia i bambini giocano o solo con gli animali o solo con le costruzioni. Quale delle seguenti affermazioni nega la proposizione iniziale?

- [A] Alla scuola dell'infanzia i bambini non giocano né con gli animali né con le costruzioni
- [B] Alla scuola dell'infanzia i bambini giocano con gli animali ma non con le costruzioni
- [C] Alla scuola dell'infanzia i bambini giocano con le costruzioni ma non con gli animali
- [D] Alla scuola dell'infanzia i bambini giocano sia con gli animali che con le costruzioni
- [E] Alla scuola dell'infanzia i bambini giocano sia con gli animali che con le costruzioni oppure né con gli animali né con le costruzioni

Capire il quesito:

La proposizione di interesse nel quesito esprime il fatto che i bambini giocano esattamente con uno dei due giochi. Il quesito consiste nell'identificare la negazione della proposizione.

Ragionamento:

Abbreviamo come segue

A: "I bambini giocano con gli animali";

C: "I bambini giocano con le costruzioni".

$(A \vee C) \wedge \neg(A \wedge C)$: "I bambini giocano o solo con gli animali o solo con le costruzioni".

Terminologia e Notazione: Disgiunzione esclusiva

Quando si intende esprimere una disgiunzione in cui i due disgiunti sono mutualmente esclusivi, come nel caso di

$$\underbrace{(A \vee C)}_{\text{uno o l'altro}} \underbrace{\wedge}_{\text{ma}} \underbrace{\neg(A \wedge C)}_{\text{non entrambi}},$$

si parla di **disgiunzione esclusiva**.

Teoria 2.3.2: Disgiunzione esclusiva e doppia implicazione


Esiste una relazione molto stretta tra disgiunzione esclusiva e doppia implicazione, immediatamente osservabile dalla Tabella 2.8.

In particolare, la disgiunzione esclusiva è logicamente equivalente alla negazione della doppia implicazione.

	A	C	$A \vee C$	$A \wedge C$	$\neg(A \wedge C)$	$(A \vee C) \wedge \neg(A \wedge C)$	$A \leftrightarrow C$	$\neg(A \leftrightarrow C)$
s_1	1	1	1	1	0	0	1	0
s_2	1	0	1	0	1	1	0	1
s_3	0	1	1	0	1	1	0	1
s_4	0	0	0	0	1	0	1	0

Tabella 2.8: Equivalenza tra disgiunzione esclusiva e doppia implicazione

Ragionamento:

Poiché la proposizione del quesito è espressa dalla disgiunzione esclusiva $(A \vee C) \wedge \neg(A \wedge C)$, e visto che il quesito ci chiede di negarla, la risposta corretta è la $A \leftrightarrow C$: i bambini giocano sia con animali sia con costruzioni oppure con nessuna delle due. 

Dunque

Soluzione:

La risposta corretta è la [E]. 

Pratica 2.3.3: Come si leggono le tavole di verità: colonne

Abbiamo osservato sopra (Pratica 2.1.2) che la lettura delle righe di una tavola di verità è *congiuntiva*. L'analisi della tabella di equivalenza tra disgiunzione esclusiva e doppia implicazione mostra chiaramente come la lettura delle colonne sia *disgiuntiva*. Notate infatti che interpretiamo la risposta al quesito come una disgiunzione (!): o è vera s_1 (e i bambini giocano sia con gli animali sia con le costruzioni) oppure è vera s_4 (e i bambini non giocano con nessuna delle due).

Teoria 2.3.3: Le situazioni logiche sono mutualmente esclusive ed esaustive

Si può estrarre un principio metodologico generale dalla discussione precedente: **le situazioni logiche sono mutualmente esclusive ed esaustive** dello spazio di tutte le possibilità. Il fatto che siano mutualmente esclusive, come appena osservato, significa che due situazioni logiche non possono essere simultaneamente realizzate. Il fatto che siano esaustive significa che una (e quindi esattamente una) deve verificarsi. **Il metodo delle tavole di verità rappresenta l'ignoranza che abbiamo su quale sia la situazione reale:** per questo partiamo dal considerarle tutte (2^n , dove n è il numero di variabili proposizionali), salvo poi *deppennarle* in presenza di dati.

Esercizio 8

Risolvere il quesito applicando soltanto le equivalenze di De Morgan.

2.4 Deduzioni con possibile, certo, necessario

Terminologia e Notazione: Segue vs è necessariamente vero

Nei quesiti che compongono i test di **logica e ragionamento**^a, si usa *è necessariamente vero che* per indicare ciò che *segue* dai dati del problema.

Se i dati *non* escludono tutte le situazioni tranne una, allora la deduzione indica ciò che può seguire, e quindi ciò che è *possibile* alla luce dei dati.

In questi casi si identifica una risposta possibile, di cui però i dati non garantiscono la certezza.

^a<https://0505-bando-cineca01.s3.eu-south-1.amazonaws.com/logica.pdf>

Quesito 2.4.1: (FURFANTI E CAVALIERI (R. SMULLYAN))

Un'isola immaginaria è abitata da due popoli: i cavalieri e i furfanti. I cavalieri dicono sempre la verità, mentre i furfanti mentono sempre. Durante un'esplorazione dell'isola, incontri due abitanti, Alfa e Beta e assisti al seguente dialogo:

Alfa: "Beta è un furfante".

Beta: "Siamo entrambi furfanti".

Sapresti dire se uno dei due è un cavaliere?

- [A] Alfa
- [B] Beta
- [C] Nessuno dei due
- [D] Entrambi
- [E] Non si può determinare

Ragionamento:

Partiamo osservando che ci sono due possibilità per gli abitanti dell'isola di Smullyan: ogni abitante è o un cavaliere o un furfante.

Caso 1: Alfa è un furfante. Da questo seguirebbe che:

1. Beta è cavaliere (perché Alfa mente dicendo che Beta è un furfante);
2. Alfa e Beta sarebbero entrambi furfanti.

Poiché non è possibile che Beta sia un cavaliere *e* un furfante, concludiamo che Alfa non può essere un furfante. Dunque è un cavaliere.

Caso 2: Alfa è un cavaliere. Da questo seguirebbe che:

1. Beta è un furfante
2. Alfa è un cavaliere oppure Beta è un Cavaliere.

Poiché sappiamo che Beta è un furfante, segue che Alfa è un cavaliere.



Terminologia e Notazione: Contraddizione

Il caso 1 – l'ipotesi cioè che Alfa fosse un furfante, ha portato a **contraddizione**: non esiste alcuna situazione logicamente possibile che verifichi ciò che segue logicamente da quell'ipotesi. ◀

Ragionamento: Continua

Il caso 1 e il caso 2 analizzati sopra sono esaustivi delle possibilità logiche e in entrambi segue che Alfa è un cavaliere. ◀

Dunque

Soluzione:

L'opzione corretta è [A]. ■

Esercizio 9

La soluzione al quesito non fa uso esplicito della logica Booleana. Costruisci un ragionamento che lo faccia.

Quesito 2.4.2: (DEDUZIONE)

Se l'A.C. Logos vince, l'allenatore è soddisfatto. Ma se l'A.C. Logos non vince, il presidente convoca l'allenatore a colloquio. Ieri l'allenatore non era soddisfatto.

Se le affermazioni precedenti sono vere, è possibile dedurre che ieri:

- [A] L'A.C. Logos non ha vinto e il presidente non ha convocato l'allenatore a colloquio
- [B] L'A.C. Logos ha vinto e il presidente ha convocato l'allenatore a colloquio
- [C] Il presidente ha convocato l'allenatore a colloquio
- [D] L'A.C. Logos ha vinto e il presidente non ha convocato l'allenatore a colloquio
- [E] L'A.C. Logos non ha vinto, ma l'allenatore avrebbe potuto essere soddisfatto comunque

Ragionamento:

Abbreviamo come segue:

V : "L'A.C. Logos vince la partita";

S : "L'allenatore è soddisfatto";

C : "Il presidente convoca l'allenatore per un colloquio".

Con questo linguaggio le opzioni sono rappresentabili in logica Booleana come segue:

$$[A] : \neg V \wedge \neg C;$$

$$[B] : V \wedge C;$$

$$[C] : C;$$

$$[D] : V \wedge \neg C;$$

$$[E] : V \wedge S.$$

Mentre i dati del problema si rappresentano come segue:

1. $V \rightarrow S$: “Se l’A.C. Logos vince, l’allenatore è soddisfatto”;
2. $\neg V \rightarrow C$: “Se l’A.C. Logos non vince, il presidente convoca l’allenatore per un colloquio”;
3. $\neg S$: “L’allenatore non era soddisfatto”.

Costruendo la tavola di verità con le variabili proposizionali del quesito, notiamo che i dati escludono tutte le situazioni logicamente possibili tranne s_7 :

	V	S	C	$V \rightarrow S$	$\neg S$	$\neg V \rightarrow C$
s_1	1	1	1	1	0	1
s_2	1	1	0	1	0	0
s_3	1	0	1	0	1	1
s_4	1	0	0	0	1	0
s_5	0	1	1	1	0	1
s_6	0	1	0	1	0	0
s_7	0	0	1	1	1	1
s_8	0	0	0	1	1	0

In s_7 è vero C .

Da questo segue

Soluzione:

La risposta corretta al quesito è l’opzione [C].

Quesito 2.4.3: NEGAZIONI MULTIPLE

È assurdo non ritenere che sia sbagliato non dare una seconda possibilità a uno studente che è bocciato all'esame. Il significato della frase precedente è che:

- [A] È comprensibile non dare una seconda possibilità a uno studente che è bocciato
- [B] È possibile dare una seconda possibilità a uno studente che è bocciato
- [C] È assurdo ritenere che sia sbagliato dare una seconda possibilità a uno studente che è bocciato
- [D] È necessario dare una seconda possibilità a uno studente che è bocciato all'esame
- [E] È sbagliato pensare che ogni studente che viene bocciato all'esame meriti una seconda possibilità

Capire il quesito:

La caratteristica della proposizione intorno a cui ruota il quesito è la presenza di un numero notevole di negazioni. La soluzione del quesito richiede che si analizzino tutte in modo accurato. Inoltre le opzioni disponibili contengono espressioni di *necessità* e *possibilità* che hanno un comportamento logico non del tutto catturabile con la logica Booleana. ◀

Teoria 2.4.1: Un numero pari di negazioni afferma

Poiché la negazione Booleana trasforma 1 in 0 e 0 in 1, un numero pari di negazioni afferma, e un numero dispari nega. Considerando l'esempio che segue, si vede immediatamente perché questo è vero: a ogni negazione si cambia il valore di verità:

s_i	C	$\neg C$	$\neg\neg C$	$\neg\neg\neg C$	$\neg\neg\neg\neg C$
s_1	1	0	1	0	1
s_2	0	1	0	1	0

Ragionamento:

Iniziamo elaborando il più chiaramente possibile il contenuto della proposizione: se

B : uno studente viene bocciato a un esame *allora*

P : è sbagliato non dargli una seconda possibilità.

Tuttavia le numerose negazioni, alcune esplicite, ed altre implicite conferiscono molte più sfumature di quante non ne consenta asserire che la bocciatura è condizione sufficiente per avere un'altra possibilità.

Aggiungiamole:

$\neg P$: non ritenere che sia sbagliato non dare una seconda possibilità;

$\neg\neg P$: è assurdo non ritenere che sia sbagliato non dare una seconda possibilità, cioè P (vedi Teoria 2.4.1, pag. 55)

Analizziamo ora le opzioni

- [A] Non è compatibile con il significato di $B \rightarrow P$, perché si riterrebbe comprensibile un controesempio ($B \wedge \neg P$);
- [B] È compatibile con $B \rightarrow P$ ma non cattura il fatto che la bocciatura sia condizione sufficiente per la seconda opportunità;
- [C] È compatibile con la proposizione ma non ne cattura il significato;
- [D] Cattura meglio di tutte le altre il fatto che non si possano ammettere controesempi a $B \rightarrow P$;
- [E] È incompatibile con la proposizione del quesito, esprimendo una proposizione che la contrasta.

Per risolvere questo tipo di quesiti può essere utile rimanere al livello del linguaggio naturale e ricorrere a equivalenze semantiche per riscrivere le frasi date.

Ad esempio, *ritenere che sia sbagliato non dare una seconda possibilità a uno studente bocciato all'esame* è semanticamente equivalente a *ritenere che sia giusto dare una seconda possibilità a uno studente bocciato all'esame*.

Di conseguenza, *non ritenere che sia sbagliato non dare una seconda possibilità a uno studente bocciato all'esame* equivale a *ritenere che sia sbagliato dare una seconda possibilità a uno studente bocciato all'esame*.

Si osservi che l'espressione *è assurdo che ...* introduce l'impossibilità della proposizione che segue. Quindi, se la proposizione che segue contiene una negazione, si esclude la possibilità che tale negazione sia vera. In altre parole, non può succedere che la proposizione sia falsa, il che equivale a dire che essa deve necessariamente essere vera.

Da questo segue

Soluzione:

L'opzione più adatta è la [D].

Teoria 2.4.2: Modalità

I connettivi che figurano nelle opzioni del quesito

- È comprensibile
- È possibile
- È assurdo
- È necessario

non ammettono una definizione mediante tavola di verità. Questo significa che il valore di verità di una proposizione che contiene una di queste modalità non è univocamente determinato dai valori di verità delle proposizioni che lo compongono.

3 Quesiti risolvibili con la logica dei predicati

Per risolvere i quesiti con la logica dei predicati useremo un linguaggio più ricco di quello della logica Booleana. Con la **logica dei predicati** si introducono due **quantificatori**:

\forall : “per ogni (per tutti)”

\exists : “per qualche (esiste)”

I quantificatori “operano” su variabili, che generalmente indicheremo con x, y , etc., le quali possono soddisfare alcune proprietà.

Le proprietà che una variabile può soddisfare sono definite da **predicati**.

3.1	Implicazioni quantificate .	60
3.2	Deduzioni	64
3.3	Approfondimento: Predicati e relazioni insiemistiche	74

3.1 Implicazioni quantificate

Quesito 3.1.1: NEGAZIONE DI IMPLICAZIONE QUANTIFICATA UNIVERSALMENTE

L'affermazione: “tutte le ciambelle escono con il buco” è falsa. Questo significa che:

- [A] Nessuna ciambella non ha il buco
- [B] Nessuna ciambella ha il buco
- [C] Non tutte le ciambelle sono senza buco
- [D] Esistono ciambelle senza buco
- [E] Esistono ciambelle col buco

Terminologia e Notazione:

I **predicati unari** o **proprietà** si esprimono con l'alfabeto maiuscolo $P(\cdot)$, $Q(\cdot)$, eccetera, dove il contenuto delle parentesi è una **variabile** o una **costante** che soddisfa la proprietà. I predicati si possono combinare con i connettivi esattamente come nel caso della logica Booleana. Quindi se $P(\cdot)$ e $Q(\cdot)$ sono predicati, allora lo sono anche $\neg P(\cdot)$, e $P(\cdot) \wedge Q(\cdot)$, $P(\cdot) \vee Q(\cdot)$, $P(\cdot) \rightarrow Q(\cdot)$.

Ragionamento:

Introduciamo i predicati C e B come segue.

$C(x)$: “ x è una ciambella”

$B(x)$: “ x ha un buco”

Utilizzando questi predicati abbreviamo la proposizione “tutte le ciambelle escono con il buco”

$$\forall x(C(x) \rightarrow B(x)).$$

Partiamo innanzitutto dall'osservazione secondo cui una proposizione quantificata universalmente è vera se e solo se *non ammette controesempi* (vedi Terminologia e Notazione 2.1, pag. 35).

Teoria 3.1.1: Significato dei quantificatori

Dato un insieme di oggetti X diciamo che $\forall x C(x)$ è vera se *tutti* gli oggetti $x \in X$ soddisfano la proprietà $C(\cdot)$.

Se, come stiamo facendo nel quesito, interpretiamo X come l'insieme di tutti gli oggetti e $C(\cdot)$ come “essere una ciambella”, allora avremo che $\forall x C(x)$ è falsa poiché non tutti gli oggetti del mondo sono ciambelle.

Se $M(\cdot)$ è interpretato come “avere massa”, allora $\forall x M(x)$ è vera. Per convincerene prendiamo k oggetti del mondo fisico e li sostituiamo a turno a x troveremo che

- $M(o_1)$ è vera (cioè l'oggetto o_i ha massa);
- $M(o_2)$ è vera;
- ...
- $M(o_k)$ è vera, cioè:

$$\forall x M(x) \equiv M(o_1) \wedge M(o_2) \wedge \dots \wedge M(o_k). \quad (3.1)$$

Esiste dunque una corrispondenza molto stretta tra il quantificatore universale \forall e la congiunzione \wedge .

Analogamente esiste una corrispondenza molto stretta tra il quantificatore esistenziale \exists e la disgiunzione \vee . “Esiste una ciambella” è vero se e solo se l'oggetto o_1 è una ciambella, oppure l'oggetto o_2 è una ciambella, oppure ... l'oggetto o_k è una ciambella:

$$\exists x C(x) \equiv C(o_1) \vee C(o_2) \vee \dots \vee C(o_k) \quad (3.2)$$

Le equivalenze (3.1) ed (3.2) danno un'altra importante applicazione delle identità di De Morgan (2.3.1).

Ragionamento: Continua

Per **Principio di bivalenza** (si veda pag. 20) se $\forall x(C(x) \rightarrow B(x))$ è falsa, la sua negazione

$$\neg \forall x(C(x) \rightarrow B(x))$$

è vera.

Dobbiamo quindi chiederci cosa significa che un'implicazione nel raggio di azione di un quantificatore universale è falsa. ◀

Teoria 3.1.2: Negazione di un'implicazione quantificata universalmente

Ricordate che per **Condizioni di verità dell'implicazione Booleana** (si veda pag. 21) un'implicazione è falsa solo quando è vero l'antecedente e falso il conseguente. Questo vale anche quando l'implicazione si trovi nel raggio d'azione di un quantificatore (universale o esistenziale).

Ragioniamo per passi:

1. $C(x) \rightarrow B(x)$ significa che *se* x ha la proprietà di essere una ciambella, *allora* x ha la proprietà di avere il buco
2. l'implicazione è falsa se x è una ciambella che *non ha* la proprietà di avere il buco, cioè $C(x) \wedge \neg B(x)$;
3. dire che *tutte* le ciambelle hanno il buco significa quindi dire che *non esiste alcun* x tale che $C(x) \wedge \neg B(x)$,
4. quindi negare la proposizione “tutte le ciambelle escono con il buco” significa dire che *non è vero che non esiste alcun* x tale che $C(x) \wedge \neg B(x)$, cioè:

$$\begin{aligned} \neg \forall x (C(x) \rightarrow B(x)) &\equiv \exists x \neg (C(x) \rightarrow B(x)) \\ &\equiv \exists x (C(x) \wedge \neg B(x)). \end{aligned}$$

dove al solito \equiv denota l'equivalenza logica.

Dunque concludiamo immediatamente che

Soluzione:

L'opzione [D] è quella corretta. ■

Quesito 3.1.2:

“È falso che tutti i cuochi italiani mettono il ketchup sulla pasta”.

La precedente affermazione è logicamente equivalente a:

- [A] Nessun cuoco italiano mette il ketchup sulla pasta
- [B] Tutti i cuochi italiani mettono il ketchup sulla pasta
- [C] Esiste almeno un cuoco italiano che non mette il ketchup sulla pasta
- [D] Tutti quelli che mettono il ketchup sulla pasta non sono italiani
- [E] Mettere il ketchup sulla pasta è tipico della cucina italiana

Ragionamento:

La proposizione “è falso che tutti i cuochi italiani mettono il ketchup sulla pasta” può essere abbreviata come

$$\neg\forall x(C(x) \rightarrow K(x))$$

dove i predicati C e K sono definiti come segue.

$C(x)$: “ x è un cuoco italiano”;

$K(x)$: “ x mette il ketchup sulla pasta”.

La formula introdotta sopra sappiamo essere equivalente a $\exists x\neg(C(x) \rightarrow K(x)) \equiv \exists x(C(x) \wedge \neg K(x))$ che, nel linguaggio naturale, si interpreta come “esiste almeno un cuoco italiano che non mette ketchup sulla pasta”. ◀

Segue

Soluzione:

L'opzione [C] è quella corretta. ■

Quesito 3.1.3:

La frase “non c’è nessuno tra noi che sappia accendere un fuoco” è falsa. Questo significa che:

- [A] sappiamo tutti accendere il fuoco
- [B] una sola persona tra noi sa accendere il fuoco
- [C] nessuno sa accendere il fuoco
- [D] almeno una persona tra noi sa accendere il fuoco
- [E] pur non essendo scout, non sappiamo accendere il fuoco

Ragionamento:

Se $G(x)$ vuol dire che x fa parte del nostro gruppo, e $F(x)$ che x sa accendere il fuoco, la proposizione “non c’è alcuno tra noi che sappia accendere un fuoco” si formalizza come $\neg\exists x(G(x) \wedge F(x))$. La sua negazione è quindi $\exists x(G(x) \wedge F(x))$, i.e. esiste almeno una persona tra noi che sa accendere il fuoco. ◀

Segue che

Soluzione:

L’opzione [D] è quella corretta. ■

3.2 Deduzioni

Quesito 3.2.1:

“Non c’è costellazione senza nome”. Se la precedente affermazione è falsa, allora è sicuramente vero che:

- [A] Nessuna costellazione ha un nome
- [B] Tutte le costellazioni hanno un nome
- [C] Una buona parte delle costellazioni non ha un nome
- [D] Alcune costellazioni non hanno un nome
- [E] Almeno una costellazione non ha un nome

Ragionamento:

Per risolvere il quesito introduciamo due predicati C e N definiti come segue.

$C(x)$: “ x è una costellazione”


$N(x)$: “ x ha un nome”

abbreviamo la proposizione “non c’è costellazione senza nome” come

$$\neg \exists x (C(x) \wedge \neg N(x)).$$


Se la precedente affermazione è falsa, allora è vera

$$\neg \neg \exists x (C(x) \wedge \neg N(x)) \equiv \exists x (C(x) \wedge \neg N(x)).$$

Nel linguaggio naturale questo vuol dire che “esiste almeno una costellazione senza nome”. 

Segue dunque

Soluzione:

L’opzione [E] è quella corretta. 

Si osservi che anche [C] e [D] potrebbero essere vere, ma non ne abbiamo la certezza.

Quesito 3.2.2: NEGAZIONE, DEDUZIONE

In un trattato attribuito a un sapiente egizio si legge:

“I sacerdoti di Tebe non consumavano vino fermentato”.

Da questa fonte *non* si può dedurre con certezza che:

- [A] Chi consumava vino fermentato non era un sacerdote di Tebe
- [B] A Tebe c’erano persone che consumavano vino fermentato e non erano sacerdoti
- [C] Se qualcuno non consumava vino fermentato, allora era un sacerdote di Tebe
- [D] La [B] e la [C]
- [E] Nessuna delle precedenti

Ragionamento:

Iniziamo introducendo due predicati S e V definiti come segue.

$S(x)$: “ x è un sacerdote di Tebe”; e

$V(x)$: “ x consumava vino fermentato”.

La proposizione “I sacerdoti di Tebe non consumavano vino fermentato” si esprime dunque in logica dei predicati come

$$\forall x(S(x) \rightarrow \neg V(x)).$$

Per poter risolvere il quesito, prima analizziamo le opzioni [A], [B] e [C]. Quindi, verifichiamo se una di queste NON si può dedurre con certezza dalla proposizione iniziale.

- [A] $\forall x(V(x) \rightarrow \neg S(x))$ è la contronominale della proposizione originale ed è logicamente equivalente alla proposizione originale (Teoria 2.2.1). Quindi, può essere dedotta con certezza.
- [B] $\exists x(T(x) \wedge V(x) \wedge \neg S(x))$ non è deducibile dalla proposizione iniziale. $T(x)$: “ x è un abitante di Tebe”. Infatti, questa dà informazioni solo su chi è sacerdote e non dice niente sulle abitudini di chi non era sacerdote. È compatibile con la fonte l’esistenza di persone che non erano sacerdoti e che bevevano il vino fermentato.
- [C] $\forall x(\neg V(x) \rightarrow S(x))$ è l’inversa della proposizione iniziale ed è sicuramente non deducibile (Teoria 2.2.1).

Da questo segue

Soluzione:

L’opzione [D] è la risposta corretta.

Pratica 3.2.1: La logica dei predicati estende quella Booleana

Avrete notato che abbiamo fatto due volte riferimento alla relazione tra implicazioni associate (Teoria 2.2.1) nel ragionamento. La logica dei predicati estende quella Booleana, nel senso che tutto quello che è vero nella seconda è vero per la prima, ma non vale l’inclusione inversa.

Quesito 3.2.3: NEGAZIONE, DEDUZIONE

Non tutti gli attori eccellenti a teatro riescono altrettanto bene al cinema. Quindi si è certi che:

- [A] Tutti gli attori eccellono nella recitazione teatrale
- [B] Tutti gli attori eccellono nella recitazione cinematografica
- [C] Almeno un attore eccelle nella recitazione teatrale e in quella cinematografica
- [D] Almeno un attore eccelle nella recitazione teatrale e non in quella cinematografica
- [E] Almeno un attore eccelle nella recitazione cinematografica e non in quella teatrale

Ragionamento:

Definiamo i predicati unari T e C come segue.

$T(x)$: “ x è un attore eccellente nella recitazione teatrale”

$C(x)$: “ x è un attore eccellente nella recitazione cinematografica”

La proposizione iniziale “non tutti gli attori eccellenti a teatro riescono altrettanto bene al cinema” può essere abbreviata come

$$\neg\forall x(T(x) \rightarrow C(x)).$$

Dire che “non tutti gli x soddisfano P ” equivale a dire che “esiste almeno un x che non soddisfa P ”, cioè

$$\neg\forall xP(x) \equiv \exists x\neg P(x).$$

Nel contesto del quesito questo vuol dire che

$$\begin{aligned} \neg\forall x(T(x) \rightarrow C(x)) &\equiv \exists x\neg(T(x) \rightarrow C(x)) \\ &\equiv \exists x(T(x) \wedge \neg C(x)). \end{aligned}$$

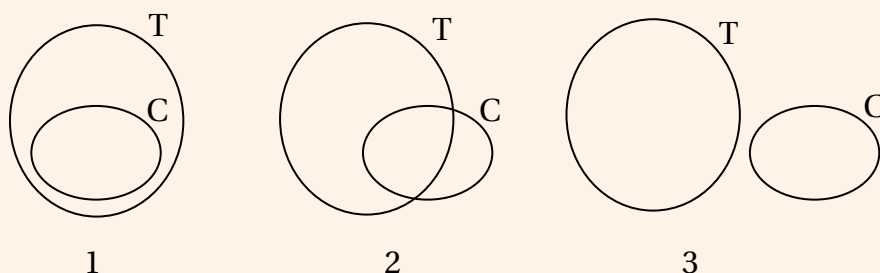
Soluzione:

Dunque “esiste almeno un attore che eccelle nella recitazione teatrale, ma non in quella cinematografica” che è esattamente l’opzione [D].

Pratica 3.2.2: I predicati esprimono proprietà che definiscono insiemi

Il quesito può essere risolto anche utilizzando la descrizione pittorica degli insiemi usata nella Sezione 1.1. Ricorderete che si danno due modi per definire gli insiemi: per elencazione e per proprietà caratteristica, cioè a un predicato.

Applicando l'osservazione al nostro quesito, la proposizione iniziale ci dice che l'insieme degli attori che eccellono nella recitazione teatrale (che indichiamo con T) *non* è un sottoinsieme dell'insieme degli attori che eccellono nella recitazione cinematografica (l'insieme C). Quindi, i due insiemi T e C sono in una delle combinazioni seguenti:



Tuttavia non sappiamo quale combinazione è quella corretta, e il quesito ci chiede di verificare quale opzione è compatibile con *tutte* le configurazioni. Analizziamo ogni opzione:

- [A] Afferma che non esistono attori che non eccellono nella recitazione teatrale, i.e. il complementare dell'insieme T è l'insieme vuoto ($T^c = \emptyset$). Si osserva che nelle configurazioni 2 e 3, $T^c \neq \emptyset$ in quanto $C \setminus T \subseteq T^c$.
- [B] Con un ragionamento simile al caso precedente si può escludere anche questa opzione.
- [C] Afferma che l'intersezione tra T e C è sempre non vuota, i.e. $T \cap C \neq \emptyset$. Si osserva che questa proprietà non è soddisfatta dalla configurazione 3.
- [D] Afferma che l'intersezione tra T e il complementare di C è sempre non vuoto, i.e. $T \cap C^c \neq \emptyset$. Questo è verificato da tutte le configurazioni. Segue che [D] è l'opzione corretta.
- [E] Afferma che l'intersezione tra C e il complementare di T è sempre non vuoto, i.e. $C \cap T^c \neq \emptyset$. Si osservi che questo non vale nella configurazione 1.

Esercizio 10

Esprimere nella logica dei predicati le opzioni non corrette del Quesito 3.2.3.

Quesito 3.2.4:

In un testo che riguarda Fidia e i suoi apprendisti si trovano queste due frasi: “Gli apprendisti di Fidia conoscono l’arte della scultura”. e, alcuni paragrafi dopo: “Gli apprendisti di Fidia che lavorano il marmo sono stati inviati ad Atene”. In base alle informazioni fornite dalle due frasi, è vero che:

- [A] Tutti gli apprendisti di Fidia lavorano il marmo e conoscono l’arte della scultura
- [B] Tutti gli apprendisti di Fidia conoscono l’arte della scultura
- [C] Tutti gli apprendisti di Fidia lavorano il marmo
- [D] Tutti gli apprendisti di Fidia sono stati inviati ad Atene
- [E] Solo gli apprendisti di Fidia che lavorano il marmo conoscono l’arte della scultura

Ragionamento:

Definiamo i predicati F , S , M e A come segue.

$F(x)$: “ x è un apprendista di Fidia”

$S(x)$: “ x conosce l’arte della scultura”

$M(x)$: “ x lavora il marmo”

$A(x)$: “ x è stato inviato ad Atene”

La proposizione “gli apprendisti di Fidia conoscono l’arte della scultura” si esprime quindi in logica dei predicati come

$$\forall x(F(x) \rightarrow S(x)),$$

mentre “gli apprendisti di Fidia che lavorano il marmo sono stati inviati ad Atene” come

$$\forall x((F(x) \wedge M(x)) \rightarrow A(x)).$$

Abbreviamo le opzioni del quesito e cerchiamo quale segue dai dati.

- [A] $\forall x(F(x) \rightarrow (M(x) \wedge S(x)))$ non segue dai dati.
- [B] $\forall x(F(x) \rightarrow S(x))$ è esattamente uno dei dati, quindi l’opzione [B] è quella corretta.
- [C] $\forall x(F(x) \rightarrow M(x))$ non segue dai dati.
- [D] $\forall x(F(x) \rightarrow A(x))$ non segue dai dati.

[E] $\forall x(F(x) \wedge M(x) \rightarrow S(x))$ non segue dai dati.

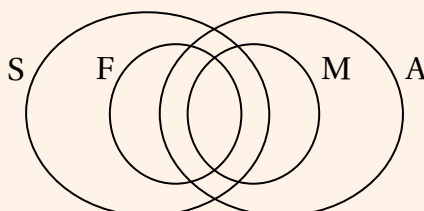
Soluzione:

La risposta corretta è l'opzione [B]

Pratica 3.2.3: Rappresentazione insiemistica delle proprietà

Possiamo rileggere i dati del quesito 3.2.4 dando una rappresentazione insiemistica alle proprietà di interesse come segue. Indichiamo con F l'insieme degli elementi x tali che $F(x)$ è soddisfatto, e lo stesso per S , M e A .

Il primo dato ci dice che $F \subseteq S$ e il secondo che $F \cap M \subseteq A$.



Per capire quale delle opzioni segue dai dati, occorre interpretarle nel linguaggio della teoria degli insiemi.

- [A] $F \subseteq M \cap S$;
- [B] $F \subseteq S$;
- [C] $F \subseteq M$;
- [D] $F \subseteq A$;
- [E] $F \cap M \subseteq S$ e $F \cap M^c \subseteq S^c$.

Si verifica facilmente che l'unica proprietà soddisfatta dalla rappresentazione insiemistica dei dati è quella dell'opzione [B].

Quesito 3.2.5: DEDUZIONE

I nuotatori professionisti sono molto motivati.

Giulia è molto motivata.

I nuotatori professionisti si allenano anche la domenica.

Se le affermazioni precedenti sono vere, allora è sicuramente vero che:

- [A] Tutti quelli che si allenano la domenica sono nuotatori professionisti
- [B] Giulia si allena anche la domenica
- [C] Giulia è una nuotatrice professionista
- [D] Non è certo che Giulia si alleni la domenica
- [E] Nessuna delle precedenti

Ragionamento:

Definiamo i predicati N , M e D come segue.

$N(x)$: “ x è un nuotatore professionista”

$M(x)$: “ x è una persona molto motivata”

$D(x)$: “ x si allena di domenica”

La proposizione “i nuotatori professionisti sono molto motivati” si può abbreviare come

$$\forall x(N(x) \rightarrow M(x)).$$

La proposizione “Giulia è molto motivata” si può abbreviare come

$$M(\text{Giulia}),$$

i.e., *Giulia* che non è più una generica variabile x , ma una costante che ha la proprietà C di essere una persona motivata. La proposizione “i nuotatori professionisti si allenano anche la domenica” si può abbreviare come

$$\forall x(N(x) \rightarrow D(x)).$$

Utilizzando lo stesso linguaggio abbreviamo le opzioni [A]-[D] e verifichiamo se si possono dedurre dalle tre premesse.

- [A] $\forall x(D(x) \rightarrow N(x))$ non si può dedurre dalle premesse in quanto è l'inversa di una di esse.

- [B] $D(Giulia)$ non si può dedurre dalle premesse. Per essere certi che Giulia si alleni anche la domenica avremmo dovuto sapere che Giulia è anche una nuotatrice professionista ($N(Giulia)$). In questo caso avremmo potuto utilizzare la terza premessa ($\forall x(N(x) \rightarrow D(x))$) per dedurre $D(Giulia)$.
- [C] $N(Giulia)$ non si deduce dalle premesse.
- [D] $D(Giulia) \vee \neg D(Giulia)$ è sempre vera.

Terminologia e Notazione: Tautologia

Una proposizione che è sempre vera, come l'opzione corretta del quesito si chiama tautologia.

Teoria 3.2.1: Una tautologia segue da qualsiasi premessa

Avrete osservato che l'opzione corretta del quesito precedente *non dipende dalle premesse*. Dunque non dipende dal valore di verità di queste. Il significato logico di **Segue da (conseguenza logica)** (si veda pag. 27) prescinde dalla verità delle premesse. Richiede soltanto che non si diano situazioni in cui le premesse sono vere e la conclusione falsa. Ma se le conclusioni sono sempre vere, come nel caso di una tautologia, allora le premesse sono del tutto irrilevanti.

Dunque

Soluzione:

L'opzione [D] è quella corretta.

Esercizio 11

Risolvere il quesito mediante rappresentazione insiemistica dei predicati.

Quesito 3.2.6:

“Esiste almeno un esperimento condotto dal professor Bosonetti che ha dimostrato l’esistenza del quinto stato della materia”.

Se la precedente affermazione è falsa, quale delle seguenti è certamente vera?

- [A] Nessun esperimento condotto dal Professor Bosonetti ha dimostrato l’esistenza del quinto stato della materia
- [B] Il Professor Bosonetti ha dimostrato che il quinto stato della materia esiste
- [C] Almeno due esperimenti del Professor Bosonetti hanno dimostrato l’esistenza del quinto stato della materia
- [D] Tutti gli esperimenti del Professor Bosonetti hanno dimostrato l’esistenza del quinto stato della materia
- [E] Alcuni esperimenti del Professor Bosonetti non sono ancora stati pubblicati

Ragionamento:

Se indichiamo con $B(x)$ un esperimento x condotto dal Professor Bosonetti, e con $Q(x)$ il fatto che x dimostri l’esistenza del quinto stato della materia, la proposizione “esiste almeno un esperimento condotto dal professor Bosonetti che ha dimostrato l’esistenza del quinto stato della materia” può essere espressa in logica dei predicati come

$$\exists x(B(x) \wedge Q(x)).$$

Dire che questa è falsa equivale a dire che $\neg\exists x(B(x) \wedge Q(x))$ è vera. ◀

Dunque

Soluzione:

L’opzione [A] è quella corretta. ■

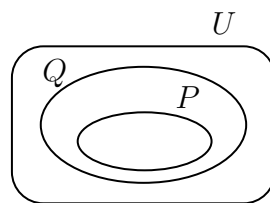
3.3 Approfondimento: Predicati e relazioni insiemistiche

Siano P e Q due predicati unari che esprimono due proprietà diverse che ciascun elemento dell'insieme universo U può avere o non avere. Vediamo ora come si formalizzano e si interpretano con il linguaggio della teoria degli insiemi diverse proposizioni.

Ogni P è Q

Formalizzazione: $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

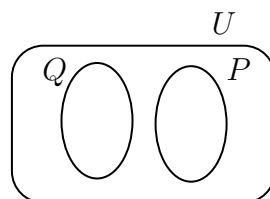
Interpretazione insiemistica: $P \subseteq Q$



Ogni P non è Q

Formalizzazione: $\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$

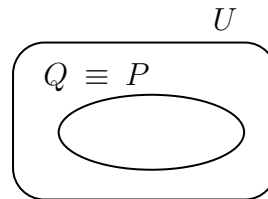
Interpretazione insiemistica: $P \subseteq Q^c$, ovvero P e Q sono disgiunti ($P \cap Q = \emptyset$).



Ogni P è Q e ogni Q è P

Formalizzazione: $\forall x((P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (Q(x) \rightarrow P(x)))$

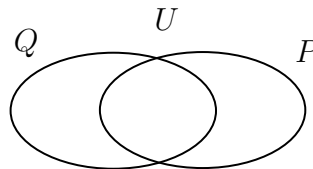
Interpretazione insiemistica: P e Q coincidono ($P \cap Q = P$)



Ogni non- P è Q

Formalizzazione: $\forall x(\neg P(x) \rightarrow Q(x))$

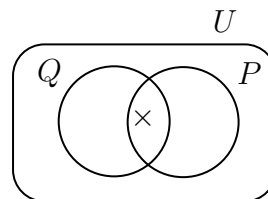
Interpretazione insiemistica: $P^c \subseteq Q$. Da questo segue che $P^c \cap Q^c = \emptyset$ e $U = P \cup Q$.



Qualche P è Q

Formalizzazione: $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$

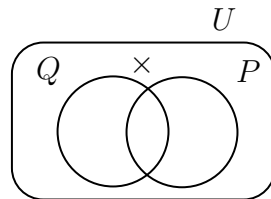
Interpretazione insiemistica: $P \cap Q \neq \emptyset$



Qualche non-P è non-Q

Formalizzazione: $\exists x(\neg P(x) \wedge \neg Q(x))$

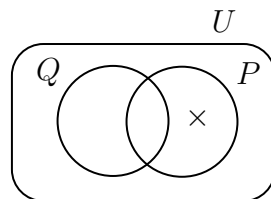
Interpretazione insiemistica: $P^c \cap Q^c \neq \emptyset$



Qualche P non è Q

Formalizzazione: $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$

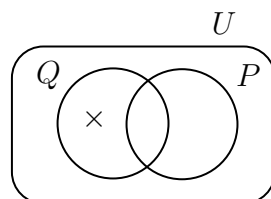
Interpretazione insiemistica: $P \setminus Q \neq \emptyset$



Qualche non-P è Q

Formalizzazione: $\exists x(\neg P(x) \wedge Q(x))$

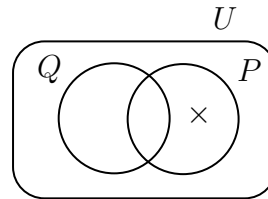
Interpretazione insiemistica: $Q \setminus P \neq \emptyset$



Non ogni P è Q

Formalizzazione: $\neg \forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \exists x \neg(P(x) \rightarrow Q(x)) \equiv \exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$

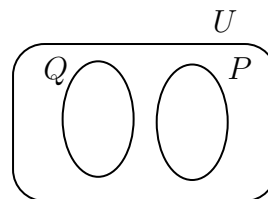
Interpretazione insiemistica: $P \setminus Q \neq \emptyset$



Non è vero che qualche P è Q

Formalizzazione: $\neg \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x \neg(P(x) \wedge Q(x)) \equiv \forall x(\neg P(x) \vee \neg Q(x))$

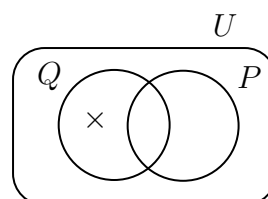
Interpretazione insiemistica: $Q \cap P = \emptyset$



Non è vero che ogni non-P è non-Q

Formalizzazione: $\neg \forall x(\neg P(x) \rightarrow \neg Q(x)) \equiv \exists x \neg(\neg P(x) \rightarrow \neg Q(x)) \equiv \exists x(\neg P(x) \wedge Q(x))$

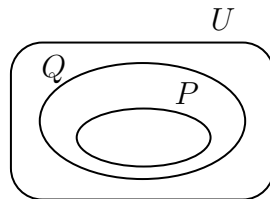
Interpretazione insiemistica: $Q \setminus P \neq \emptyset$



Non è vero che qualche P non è Q

Formalizzazione: $\neg\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x)) \equiv \forall x\neg(P(x) \wedge \neg Q(x)) \equiv \forall x(\neg P(x) \vee Q(x))$

Interpretazione insiemistica: $P \subseteq Q$



4 Quesiti di completamento delle sequenze

Fino ad ora i quesiti hanno sempre chiesto di capire *cosa segue* dai dati o assunzioni fatte. Nei quesiti che seguono la prospettiva è opposta. Viene chiesto di osservare una sequenza di oggetti, lettere o numeri e trovare la regola che ne definisce gli elementi. Ovviamente, le spiegazioni dietro una data sequenza possono essere più di una. Generalmente, la risposta al quesito corrisponde all'opzione che spiega la sequenza e che è "più semplice". Dopo aver visto diversi tipi di quesiti sulle sequenze, stileremo una lista delle proprietà da testare quando dovrete risolvere questi tipi di quesiti.

4.1	Completamento di successioni numeriche	80
4.2	Individuazione del numero mancante	87
4.3	Completamento di sequenze alfabetiche	91
4.4	Considerazioni sulla soluzione dei quesiti di completamento delle sequenze	94

4.1 Completamento di successioni numeriche

Quesito 4.1.1:

Individuare il numero che completa correttamente la seguente successione numerica

9, 19, 30, 42, 55, 69 ...

- [A] 84
- [B] 86
- [C] 81
- [D] 78
- [E] 88

Ragionamento:

Questa successione numerica è ottenuta sommando al numero precedente una quantità che cresce di 1 unità a ogni passo:

$$9 + 10 = 19$$

$$19 + 11 = 30$$

$$30 + 12 = 42$$

$$42 + 13 = 55$$

$$55 + 14 = 69$$

$$69 + 15 = \boxed{84}$$

Soluzione:

Quindi, la risposta corretta è [A] 84 e la regola generale di questa successione numerica può essere scritta come

$$\begin{cases} a_0 = 9 \\ a_n = a_{n-1} + (n + 9) \end{cases}$$

Quesito 4.1.2:

Individuare il numero che completa correttamente la seguente successione numerica

$$4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, \dots$$

- [A] 123
- [B] 87
- [C] 94
- [D] 116
- [E] 124

Ragionamento:

Questa successione è ottenuta sommando ciascuna volta il numero precedente a quello ancora precedente:

$$\begin{aligned}7 + 4 &= 11 \\11 + 7 &= 18 \\18 + 11 &= 29 \\29 + 18 &= 47 \\47 + 29 &= 76 \\76 + 47 &= \boxed{123}\end{aligned}$$

La regola è quindi: ogni termine è la somma dei due numeri precedenti. ◀

Soluzione:

La risposta corretta è [A] 123 e la regola generale di questa successione numerica può essere scritta come

$$\begin{cases} a_0 = 4 \\ a_1 = 7 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$$



Quesito 4.1.3:

Individuare il numero che completa correttamente la seguente successione numerica

4, 9, 16, 25, ...

- [A] 35
- [B] 34
- [C] 36
- [D] 37
- [E] 33

Ragionamento:

La successione proposta contiene numeri che sono quadrati perfetti successivi:

$$4 = 2^2$$

$$9 = 3^2$$

$$16 = 4^2$$

$$25 = 5^2$$

$$\boxed{36} = 6^2$$

Soluzione:

La risposta corretta è [C] 36 e la regola generale di questa successione numerica può essere scritta come $a_n = (n + 2)^2$ con $n = 0, 1, 2, \dots$ ■

Quesito 4.1.4:

Individuare il numero che completa correttamente la seguente successione numerica

6, 24, 96, 384, ...

[A] 1536

[B] 1563

[C] 1653

[D] 1365

[E] 1356

Ragionamento:

Osserviamo che ogni numero è 4 volte il precedente:

$$6 \times 4 = 24$$

$$24 \times 4 = 96$$

$$96 \times 4 = 384$$

$$384 \times 4 = \boxed{1536}$$

Soluzione:

La risposta corretta è [A] 1536 e la regola generale di questa successione numerica può essere scritta come

$$\begin{cases} a_0 = 6 \\ a_n = a_{n-1} \times 4. \end{cases}$$

Quesito 4.1.5:

Individuare il numero che completa correttamente la seguente successione numerica

3, 4, 6, 12, 12, 36, 24, 108, 48, ...

- [A] 342
- [B] 234
- [C] 432
- [D] 243
- [E] 324

Ragionamento:

Osserviamo che la successione alterna due sequenze diverse. Per termini nelle posizioni dispari ($a_0 = 3, a_2 = 6, a_4 = 12, a_6 = 24, a_8 = 48...$) si moltiplica per 2 ogni volta:

$$3 \times 2 = 6$$

$$6 \times 2 = 12$$

$$12 \times 2 = 24$$

$$24 \times 2 = 48$$

Per termini nelle posizioni pari ($a_1 = 4, a_3 = 12, a_5 = 36, a_7 = 108,...$) si moltiplica per 3 ogni volta:

$$4 \times 3 = 12$$

$$12 \times 3 = 36$$

$$36 \times 3 = 108$$

Quindi, il termine successivo (indice 11) appartiene alla successione dispari e sarà:

$$108 \times 3 = \boxed{324}$$

Soluzione:

Segue che l'opzione corretta è [E] e la regola generale di questa successione numerica può essere scritta come

$$\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_1 = 4 \\ a_{2n} = a_{2(n-1)} \times 2 \\ a_{2n+1} = a_{2n-1} \times 3. \end{cases}$$

Quesito 4.1.6:

Individuare il numero che completa correttamente la seguente successione numerica

3, 9, 8, 10, 30, 29, 31, 93, 92, 94, ...

- [A] 282
- [B] 128
- [C] 182
- [D] 228
- [E] 381

Ragionamento:

In questa successione numerica tre operazioni si ripetono ciclicamente:

1. moltiplicare per 3,
2. sottrarre 1, e
3. aggiungere 2.

Infatti,

$$\begin{array}{lll} 3 \times 3 = 9 & 10 \times 3 = 30 & 31 \times 3 = 93 \\ 9 - 1 = 8 & 30 - 1 = 29 & 93 - 1 = 92 \\ 8 + 2 = 10 & 29 + 2 = 31 & 92 + 2 = 94 \end{array}$$

Il prossimo termine sarà quindi:

$$94 \times 3 = \boxed{282}$$

Soluzione:

Segue che l'opzione corretta è [A] e la regola generale di questa successione numerica può essere scritta come

$$\begin{cases} a_0 = 3 \\ a_{n+1} = a_n \times 3 \\ a_{n+2} = a_{n+1} - 1 \\ a_{n+3} = a_{n+2} + 2. \end{cases}$$

Quesito 4.1.7:

Individuare il numero che completa correttamente la seguente successione numerica

560, 543, 526, 509, 492 . . .

[A] 472

[B] 457

[C] 463

[D] 475

[E] 468

Ragionamento:

Osservando le differenze tra i termini consecutivi, si nota che:

$$560 - 543 = 17$$

$$543 - 526 = 17$$

$$526 - 509 = 17$$

$$509 - 492 = 17$$

La successione decresce in modo regolare, sottraendo 17 a ogni termine. Pertanto, il termine successivo si ottiene calcolando:

$$492 - 17 = \boxed{475}$$

Soluzione:

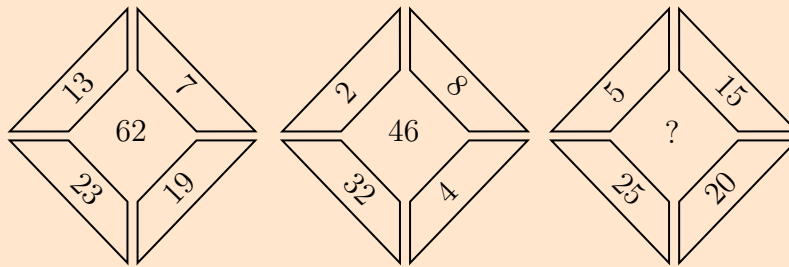
La risposta corretta al quesito è l'opzione [D] e la regola generale di questa successione numerica può essere scritta come

$$\begin{cases} a_0 = 560 \\ a_n = a_{n-1} - 17. \end{cases}$$

4.2 Individuazione del numero mancante

Quesito 4.2.1:

Individuare il numero mancante.



- [A] 45
- [B] 50
- [C] 35
- [D] 60
- [E] 65

Ragionamento:

Per trovare la regola, osserviamo i primi due rombi. Si osserva che la somma dei numeri sui lati è uguale al numero centrale, i.e.,

- Primo rombo: $13 + 7 + 23 + 19 = 62$
- Secondo rombo: $2 + 8 + 32 + 4 = 46$

Applichiamo la stessa regola al terzo rombo:

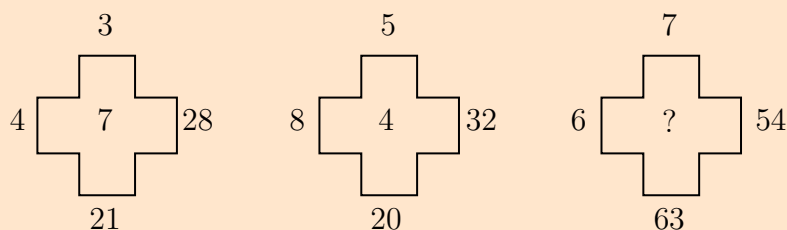
$$5 + 15 + 25 + 20 = 65$$

Soluzione:

Quindi, il numero mancante al centro è **65** e la risposta corretta è [E].

Quesito 4.2.2:

Individuare il numero mancante.



- [A] 6
- [B] 8
- [C] 10
- [D] 9
- [E] 11

Ragionamento:

Il numero centrale agisce da moltiplicatore sulle somme degli opposti. Analizziamo il primo blocco.

$$\begin{aligned} 3 \times 7 &= 21 \quad (\text{sopra} \rightarrow \text{sotto}) \\ 4 \times 7 &= 28 \quad (\text{sinistra} \rightarrow \text{destra}) \end{aligned}$$

Analizziamo ora il secondo blocco.

$$\begin{aligned} 5 \times 4 &= 20 \quad (\text{sopra} \rightarrow \text{sotto}) \\ 8 \times 4 &= 32 \quad (\text{sinistra} \rightarrow \text{destra}) \end{aligned}$$

Analizziamo ora il terzo blocco mettendo la variabile x al posto di ?.

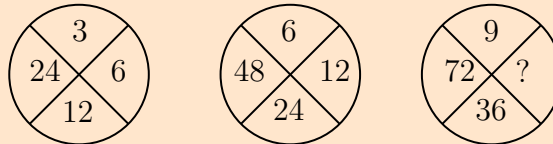
$$\begin{aligned} 7 \times x &= 63 \quad (\text{sopra} \rightarrow \text{sotto}) \\ 6 \times x &= 54 \quad (\text{sinistra} \rightarrow \text{destra}) \end{aligned}$$

Soluzione:

Segue che $x = 9$ e la risposta corretta è [D].

Quesito 4.2.3:

Individuare il numero mancante.



- [A] 12
- [B] 15
- [C] 18
- [D] 27
- [E] 24

Ragionamento:

Partendo dal numero in alto e procedendo in senso orario, ogni numero successivo è ottenuto moltiplicando per 2 il precedente. Analizziamo il primo “orologio”.

$$\begin{aligned}3 \times 2 &= 6 \\6 \times 2 &= 12 \\12 \times 2 &= 24\end{aligned}$$

Analizziamo il secondo “orologio”.

$$\begin{aligned}6 \times 2 &= 12 \\12 \times 2 &= 24 \\24 \times 2 &= 48\end{aligned}$$

Analizziamo il terzo “orologio”.

$$\begin{aligned}9 \times 2 &= \boxed{18} \\18 \times 2 &= 36 \\36 \times 2 &= 72\end{aligned}$$

Soluzione:

La risposta corretta al quesito è l'opzione [C].

Quesito 4.2.4:

Individuare il numero mancante.

12	22	32
24	44	?
20	30	40

- [A] 62
- [B] 64
- [C] 58
- [D] 60
- [E] 52

Ragionamento:

Per ciascuna terna, il numero in alto si ottiene sottraendo 8 al numero in basso. Il numero centrale si ottiene invece raddoppiando il numero in alto.

Verifichiamo questa regola per la prima terna.

$$\begin{aligned}20 - 8 &= 12 \\ 12 \times 2 &= 24\end{aligned}$$

Verifichiamo la regola anche per la seconda terna.

$$\begin{aligned}30 - 8 &= 22 \\ 22 \times 2 &= 44\end{aligned}$$

Quindi, per la terza terna abbiamo

$$\begin{aligned}40 - 8 &= 32 \\ 32 \times 2 &= 64.\end{aligned}$$

Soluzione:

Segue che il numero mancante è 64 e [B] è la risposta corretta al quesito. ■

4.3 Completamento di sequenze alfabetiche

Nei test che si svolgono in lingua italiana, generalmente si fa riferimento all'alfabeto italiano riportato nella tabella 4.1. Qualora si facesse riferimento a J, K, o X, etc., allora si faccia riferimento all'alfabeto inglese riportato nella tabella 4.2.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21

Tabella 4.1: Alfabeto Italiano

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Tabella 4.2: Alfabeto Inglese

Quesito 4.3.1:

Individuare la lettera che completa correttamente la seguente sequenza di lettere:

E, H, M, P, S, ...

[A] U [B] Z [C] V [D] T [E] C

Ragionamento:

Se si evidenziano le lettere della sequenza, si osserva che il numero di lettere tra un elemento della sequenza e l'altro è sempre costante: due.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	Z
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Soluzione:

Segue che la lettera che completa la sequenza è la 'V' (opzione [C]).

Quesito 4.3.2:

Individuare la lettera che completa correttamente la seguente sequenza di lettere:

$Z, U, R, N \dots$

[A] D [B] E [C] F [D] G [E] H

Ragionamento:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	Z
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Come sopra, se si evidenziano le lettere della sequenza, si osserva che tra una e l'altra c'è sempre una quantità crescente: 1, 2 e 3. Quindi la lettera che completa la successione si trova a distanza di 4 dalla precedente: G. ◀

Soluzione:

La risposta corretta è l'opzione [D]. ■

Quesito 4.3.3:

Individuare la lettera e il numero che completano correttamente la seguente sequenza:

$B, 7, D, 14, F, 28, H, 56, \dots$

[A] M, 125 [B] O, 100 [C] I, 90 [D] L, 112 [E] L, 121

Ragionamento:

La sequenza riportata è composta da due sotto-sequenze: una definita sull'alfabeto e riportata nelle posizioni dispari, e l'altra definita sui numeri naturali e riportata nelle posizioni pari. Ognuna di queste sequenze è indipendente dall'altra. Se riportiamo le lettere della sequenza sul vettore dell'alfabeto, ci si accorge che tra una lettera e l'altra la distanza è sempre di 2. Segue che la lettera che completa la sequenza è *L*. Per quanto riguarda i numeri si osserva che ognuno è il doppio del precedente, i.e. $7 \times 2 = 14$, $14 \times 2 = 28$, $28 \times 2 = 56$.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	Z
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

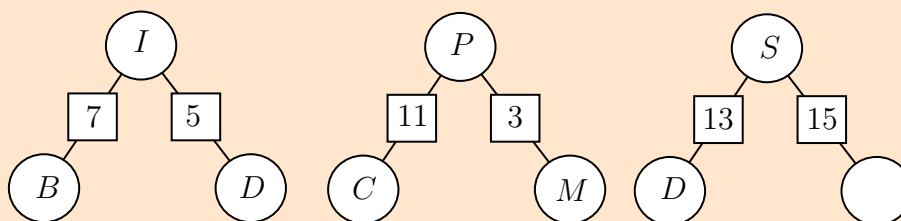
Segue che il numero che completa la sequenza è $56 \times 2 = 112$.

Soluzione:

L'opzione corretta è [D] L, 112.

Quesito 4.3.4:

Individuare la lettera che completa correttamente la figura.



- [A] B [B] Z [C] A [D] C [E] V

Ragionamento:

Per risolvere questo quesito è utile considerare l'alfabeto italiano con gli indici delle posizioni come quello riportato nella tabella 4.1. Si osserva che se alla lettera *B*, che si trova in posizione 2, si aggiungono 7 posizioni, si ottiene la lettera il cui indice è $7 + 2 = 9$, ovvero la lettera *I*. Inoltre se alla lettera *I*, si sottraggono 5 posizioni, si ottiene la lettera il cui indice è $9 - 5 = 4$, i.e. la lettera *D*. Lo stesso vale per la seconda figura. Se alla lettera *C*, che si trova in posizione 3, si aggiungono 11 posizioni, troviamo la lettera con indice $3 + 11 = 14$, i.e. *P*. Se alla lettera *P* si tolgono 3 posizioni, si ottiene la lettera il cui indice è $14 - 3 = 11$, i.e. *M*. Per quanto riguarda l'ultima figura, verifichiamo che se alla lettera *D*, che si trova in posizione 4, si aggiungono 13 posizioni, si ottiene la lettera il cui indice è $4 + 13 = 17$, i.e. *S*. Se alla lettera *S* si sottraggono 15 posizioni, otteniamo la lettera il cui indice è $17 - 15 = 2$, i.e. *B*.

Soluzione:

Segue che la soluzione del quesito è la risposta [A].

4.4 Considerazioni sulla soluzione dei quesiti di completamento delle sequenze

Come osservato all'inizio del capitolo e come probabilmente avete sperimentato nel risolvere i quesiti proposti, nei quesiti riguardanti le successioni le possibili soluzioni possono essere più di una. In generale, non esiste un metodo universale per trovare la soluzione di questi problemi. Tuttavia, è possibile stilare un elenco di proprietà da controllare e che possono guidare il nostro intuito a individuare la soluzione del quesito.

1. Differenze tra termini consecutivi

Le differenze tra termini consecutivi possono essere

- costanti come nella successione 3, 5, 7, 9, ... (si aggiunge sempre 2)
- crescenti come nella successione 2, 3, 5, 8, 12, 17, ... (si aggiunge sempre un numero crescente di unità 1, 2, 3, 4, 5, ...)
- alternate come nella successione 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14, ... (si aggiunge 3, poi 1, poi 3, poi 1, ...)

2. Rapporti tra termini consecutivi

Come nel caso delle differenze, anche i rapporti tra due termini consecutivi della successione data possono essere costanti, crescenti o decrescenti

3. Posizione e indice

Come visto nei quesiti precedenti, può accadere che la successione data sia costituita da due sotto-successioni. Generalmente i termini di indice pari seguono un criterio mentre i termini di indice dispari ne seguono un altro. In alcuni casi le sotto-successioni sono tre per cui i numeri con indice $3n$ sono dipendenti l'uno dall'altro, e lo stesso per i termini con indice $1 + 3n$ e $2 + 3n$.

5 Quesiti sulla probabilità

I quesiti elementari di probabilità richiedono di

1. identificare le situazioni compatibili con i dati;
2. assumere che siano equiprobabili;
3. usare 1. e 2. per calcolare il rapporto tra le situazioni favorevoli e quelle possibili;
4. utilizzare correttamente la definizione di probabilità condizionata.

Per la risoluzione dei quesiti probabilistici non è necessario usare metodi logici, anche se, come vedremo, sono molto utili per il punto 1.

5.1	Identificazione delle situazioni possibili	96
5.2	Identificazione di eventi composti	99
5.3	Probabilità condizionate .	103

5.1 Identificazione delle situazioni possibili

Quesito 5.1.1:

Se si lanciano due dadi a sei facce, qual è la probabilità che la somma dei risultati sia uguale a 9?

[A] 5/36 [B] 1/13 [C] 1/2 [D] 1/4 [E] 1/9

Terminologia e Notazione: Eventi

Le proposizioni della logica Booleana in ambito probabilistico si chiamano **eventi**. Quando parliamo di eventi invece che di proposizioni diamo immediatamente una connotazione di incertezza: sappiamo che un evento è una proposizione che può essere vera o falsa (Teoria 2.1.1, pag. 20) ma non sappiamo quale. ◀

Ragionamento:

Gli eventi rilevanti per il quesito sono B_i e A_i dove i è un numero tra 1 e 6, e

B_i : “Il risultato del dado bianco è i ”

A_i : “Il risultato del dado arancione è i ”.

Iniziamo identificando le 36 situazioni possibili:

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Affinché la somma dei due dadi sia 9, si deve verificare una delle seguenti quattro situazioni:

(3,6); (4,5); (5,4); (6,3).

Sotto l'ipotesi che tutte le situazioni siano *equiprobabili*, troviamo quindi 4 casi favorevoli su 36 casi, cioè la probabilità di ottenere 9 è 1/9. ◀

Soluzione:

La risposta corretta è l'opzione [E] 1/9.

Pratica 5.1.1: Equiprobabilità

Notate che ha senso parlare di [E] come *la* risposta corretta soltanto alla luce dell'ipotesi di bilanciamento dei due dadi. Questa informazione non appare tra i dati del quesito. Tuttavia, in assenza di informazioni del contrario, è un'ipotesi che questo tipo di quesito dà per scontata.

Quesito 5.1.2:

Se si lanciano due dadi, con quale probabilità si otterrà un punteggio dispari?

- [A] 1/3 [B] 1/2 [C] 2/5 [D] 3/5 [E] 4/9

Ragionamento:

Le situazioni possibili sono le stesse del quesito precedente. Il quesito ci chiede di calcolare la probabilità di ottenere un punteggio dispari.

Procediamo quindi depennando così (■, ■) le situazioni che *non verificano* “ $B_i + A_i$ è dispari”:

	■	■	■	■	■	■
□	(■, ■)	(□, ■)	(■, ■)	(□, ■)	(■, ■)	(□, ■)
□	(□, ■)	(■, ■)	(□, ■)	(■, ■)	(□, ■)	(■, ■)
□	(■, ■)	(□, ■)	(■, ■)	(□, ■)	(■, ■)	(□, ■)
□	(□, ■)	(■, ■)	(□, ■)	(■, ■)	(□, ■)	(■, ■)
□	(■, ■)	(□, ■)	(■, ■)	(□, ■)	(■, ■)	(□, ■)
□	(□, ■)	(■, ■)	(□, ■)	(■, ■)	(□, ■)	(■, ■)

Rimangono 18 delle 36 situazioni di partenza per una probabilità di 1/2.

Soluzione:

La risposta corretta è l'opzione [B].

Pratica 5.1.2: L'insieme delle situazioni possibili nei dadi è il prodotto cartesiano

Un errore frequente nella risoluzione di quesiti elementari come questi è trascurare la differenza – chiara dalle figure di sopra – tra, diciamo, $(\text{■}, \text{■})$ e $(\text{■}, \text{■})$. Sono infatti due modi *distinti* di ottenere la somma 7.

Non commetterete questo errore se ricorderete che per lo spazio delle situazioni possibili descritte nel lancio di due dadi (o monete, eccetera) si costruisce prendendo il **Prodotto cartesiano** (si veda pag. 17) delle situazioni possibili descritte dai singoli dadi.

Quesito 5.1.3:

Un sacchetto di biglie contiene 15 biglie rosse. Quante biglie verdi devo aggiungere al sacchetto affinché la probabilità di pescare una biglia rossa sia 0.6?

[A] 5 [B] 25 [C] 16 [D] 3 [E] 10

Ragionamento:

Sia R l'evento "pescare una biglia rossa". Se indichiamo con x il numero di biglie verdi da aggiungere al sacchetto, abbiamo che

$$P(R) = \frac{15}{15 + x} = \frac{6}{10}.$$

Segue che

$$15 \cdot 10 = 6(15 + x)$$

$$150 = 90 + 6x$$

$$60 = 6x$$

$$x = 10.$$

Affinché $P(R) = 0.6$ al sacchetto vanno aggiunte 10 biglie verdi. ◀

Soluzione:

La risposta corretta è l'opzione [E] ■

5.2 Identificazione di eventi composti

Quesito 5.2.1:

Qual è la probabilità di estrarre un asso, un due o un tre di colore nero da un mazzo di carte da poker?

[A] 2/15 [B] 3/26 [C] 5/35 [D] 2/28 [E] 4/37

Ragionamento:

Un mazzo da poker contiene 52 carte. I semi neri sono fiori (♣) e picche (♠), ciascuno con 13 carte. Abbreviamo come segue:

- P_i : “estrarre la i -esima carta di picche”
- F_i : “estrarre la i -esima carta di fiori”

Questo ci permette di abbreviare l’evento composto “estrarre un asso, un due o un tre di colore nero” con

$$A = P_1 \vee P_2 \vee P_3 \vee F_1 \vee F_2 \vee F_3.$$

Per procedere abbiamo bisogno di un po’ di terminologia e di un tassello teorico.

Terminologia e Notazione: Eventi logicamente incompatibili

Diciamo che due eventi E_1 ed E_2 sono **mutualmente esclusivi** se non si realizzano mai insieme. In termini logici questo significa che la congiunzione $E_1 \wedge E_2$ prende sempre valore 0. Per questo eventi mutualmente esclusivi sono comunemente chiamati anche **logicamente incompatibili**.

Teoria 5.2.1: Regola dell’addizione

La probabilità di una disgiunzione composta da eventi logicamente incompatibili si calcola sommando le probabilità dei disgiunti.

Ragionamento: (continua)

Poiché l’estrazione di una carta è incompatibile con l’estrazione di qualsiasi altra carta, non si possono verificare più disgiunti di A simultaneamente. Dunque in virtù della **Regola dell’addizione** (si veda pag. 99) abbiamo

$$\begin{aligned} P(A) &= P(P_1) + P(P_2) + P(P_3) + P(F_1) + P(F_2) + P(F_3) \\ &= 6 \cdot \frac{1}{52} \\ &= \frac{3}{26} \end{aligned}$$

Soluzione:

La risposta corretta è [B] $\frac{3}{26}$. ■

Notate che anche in questo caso la computazione probabilistica che porta alla soluzione fa uso dell'ipotesi di equiprobabilità degli eventi elementari attribuendo uniformemente $1/52$ all'estrazione di una qualsiasi carta.

Quesito 5.2.2:

In palestra ci sono a disposizione tre tipi di palloni: il 25% sono da calcio, il 50% da basket e il resto da pallavolo. Il 10% dei palloni di ogni tipo è sgonfio. I palloni, anche se sgonfi, sono indistinguibili al tatto. Il carrello dei palloni è nello stanzino della palestra dove c'è poca luce. Agostino va a prendere un pallone e vorrebbe che fosse da calcio (non importa se sgonfio) oppure da basket, purché sia gonfio.

Qual è la probabilità che il pallone estratto sia del tipo desiderato?

- [A] 65%
- [B] 75%
- [C] 55%
- [D] 60%
- [E] 70%

Ragionamento:

Definiamo gli eventi C , B , P e S come segue:

C : "Agostino estrae una palla da calcio"

B : "Agostino estrae una palla da basket"

P : "Agostino estrae una palla da pallavolo"

S : "Il pallone è sgonfio"

Per cui, l'evento di interesse "pescare un pallone da calcio (non importa se sgonfio) oppure da basket, purché sia gonfio" si abbrevia con

$$C \vee (B \wedge \neg S).$$
◀

Poiché non abbiamo alcuna informazione sulla compatibilità logica dei due disgiunti, abbiamo bisogno di una regola che ci permetta di calcolare la probabilità di interesse.

Teoria 5.2.2: Regola della probabilità totale

La probabilità di una disgiunzione arbitraria si calcola sommando le probabilità dei disgiunti e sottraendo la probabilità della loro congiunzione.

Ragionamento: (continua)

Grazie alla [Regola della probabilità totale](#) (si veda pag. 101) abbiamo:

$$P(C \vee (B \wedge \neg S)) = P(C) + P(B \wedge \neg S) - P(C \wedge (B \wedge \neg S))$$

Abbiamo fatto un po' di progresso, ma senza una regola che ci permetta di calcolare la probabilità delle due congiunzioni, non possiamo continuare.

Terminologia e Notazione: Indipendenza stocastica

Diciamo che due eventi E_1 ed E_2 sono **stocasticamente indipendenti** se le informazioni che possiamo ottenere dalla verifica dell'esito di uno dei due eventi non influenzano la probabilità che attribuiamo all'altro.

Teoria 5.2.3: Regola del prodotto

Se due eventi sono stocasticamente indipendenti, allora la probabilità della loro congiunzione è data dal prodotto delle loro probabilità.

Ragionamento: (continua)

Poiché C e B sono eventi incompatibili, $P(C \wedge (B \wedge \neg S)) = 0$. E poiché è ragionevole assumere che B e $\neg S$ siano indipendenti, per [Regola del prodotto](#) (si veda pag. 101) abbiamo:

$$\begin{aligned} P(B \wedge \neg S) &= P(B) \times P(\neg S) \\ &= 0.5 \times (1 - 0.1) \\ &= 0.5 \times 0.9 \\ &= 0.45 \end{aligned}$$

Sfruttando ancora una volta l'incompatibilità di C e B la [Regola dell'addizione](#) (si veda pag. 99) ci permette di concludere che:

$$\begin{aligned} P(C \vee (B \wedge \neg S)) &= P(C) + P(B \wedge \neg S) \\ &= 0.25 + 0.45 \\ &= 0.70 \end{aligned}$$

Soluzione:

La risposta corretta è l'opzione [E], 70%.

Quesito 5.2.3:

Qual è la probabilità di estrarre un sette o una carta di cuori da un mazzo di carte da poker?

[A] 4/13 [B] 3/26 [C] 5/35 [D] 2/28 [E] 4/37

Ragionamento:

Nel mazzo ci sono:

- 4 sette (uno per ogni seme);
- 13 carte di cuori;
- 1 carta che è sia un 7 che di cuori (il 7 di cuori).

Applicando la **Regola della probabilità totale** (si veda pag. 101) otteniamo

$$P(7 \vee \heartsuit) = P(7) + P(\heartsuit) - P(7 \wedge \heartsuit) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}.$$

Soluzione:

La risposta corretta è [A].

Quesito 5.2.4:

La maestra Chiara fa fare ai bambini della 5° una gara di rigori e divide la classe in due squadre: la squadra blu e la squadra rossa. La squadra blu sceglie come rigoristi Anita, Bruno e Carlotta. Se la probabilità che Anita faccia gol è 0.6, 0.5 per Bruno e 0.2 per Carlotta, qual è la probabilità che facciano tutti e tre gol?

[A] 3/50 [B] 4/43 [C] 6/50 [D] 5/48 [E] 7/63

Ragionamento:

Indichiamo con A l'evento "Anita farà gol", con B l'evento "Bruno farà gol" e con C "Carlotta farà gol". Supponendo che i tre eventi siano stocasticamente indipendenti, la **Regola del prodotto** (si veda pag. 101) ci permette di concludere che la probabilità che tutti e tre facciano gol è:

$$P(A \wedge B \wedge C) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{10} \times \frac{2}{10} = \frac{3}{50}$$

Soluzione:

La risposta corretta è l'opzione [A].

5.3 Probabilità condizionate

Quesito 5.3.1:

In un sacchetto ci sono cinque biglie numerate da 1 a 5. Se si estraggono due biglie, qual è la probabilità che una delle due sia il 5?

[A] 1/5 [B] 2/5 [C] 1/10 [D] 3/5 [E] 5/10

Ragionamento:

Le possibili coppie di biglie estraibili (senza reinserimento) sono:

$$\binom{5}{2} = 10$$

Le coppie di due biglie che contengono il numero 5 sono quattro:

$$(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5).$$

Se $I_{i,j}$ indica che sono state estratte le biglie con il numero i e la biglia con il numero j , la probabilità di estrarre il 5 prendendo due biglie dal sacchetto è

$$P(I_{1,5}) + P(I_{2,5}) + P(I_{3,5}) + P(I_{4,5}) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

Soluzione:

La risposta corretta al quesito è l'opzione [B].

Questo quesito si può risolvere utilizzando la probabilità condizionata.

Terminologia e Notazione: Probabilità condizionata

Dati due eventi A e B con $P(B) \neq 0$, chiamiamo $P(A | B)$ la **probabilità di A dato B** e la calcoliamo ponendo

$$P(A | B) = \frac{P(A \wedge B)}{P(B)}.$$

La probabilità di A dato B corrisponde alla probabilità che attribuite ad A sotto l'ipotesi che B sia vero. In pratica questo può avvenire perché sapete che B si è verificato, oppure perché lo assumete. Dal punto di vista della quantità $P(A | B)$ i due casi sono trattati esattamente nello stesso modo. ◀

Teoria 5.3.1: Regola del prodotto condizionato

Sotto l'ipotesi che l'evento condizionante B abbia probabilità non nulla, $P(A | B)$ è molto utile perché permette di calcolare la probabilità di $A \wedge B$ anche se *non assumiamo* che A e B siano stocasticamente indipendenti ponendo

$$P(A \wedge B) = P(A | B)P(B).$$

Alla luce di questa osservazione una soluzione alternativa al quesito può essere data come segue.

Se indichiamo con 5 l'evento “estrarre la biglia con il 5” e con $\neg 5$ l'evento “estrarre la biglia con un numero diverso da 5”, la probabilità che dobbiamo calcolare è “la probabilità di estrarre il 5 e successivamente non il 5, oppure di estrarre un numero diverso da 5 e successivamente il 5”, cioè:

$$P(5)P(\neg 5 | 5) + P(\neg 5)P(5 | \neg 5) = \frac{1}{5} \cdot 1 + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{5}.$$

Quesito 5.3.2:

Qual è la probabilità che estraendo due carte da un mazzo di poker, una alla volta e senza reinserimento, escano due assi?

[A] 1/130 [B] 3/260 [C] 1/221 [D] 2/282 [E] 5/350

Ragionamento:

Definiamo gli eventi A_1 e A_2 come segue.

A_1 : “Nella prima estrazione ho estratto un asso”

A_2 : “Nella seconda estrazione ho estratto un asso”

L'evento del quale dobbiamo calcolare la probabilità è

$$A_1 \wedge A_2.$$

Si noti che in questo caso i due eventi A_1 e A_2 non sono indipendenti. Infatti, sapere se nella prima estrazione è stato estratto un asso o meno cambia la probabilità di

estrarre un asso nella seconda estrazione. Segue che

$$\begin{aligned}P(A_1 \wedge A_2) &= P(A_1)P(A_2 | A_1) \\ &= \frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} \\ &= \frac{1}{221}\end{aligned}$$

Soluzione:

La risposta corretta è [C].

Pratica 5.3.1:

Quando avete buoni motivi per credere che gli eventi che vi interessano siano stocasticamente indipendenti, calcolate la probabilità della loro congiunzione moltiplicando le loro probabilità. Se, viceversa, non avete ragione per credere che gli eventi siano indipendenti, allora calcolate la loro probabilità utilizzando la **Regola del prodotto condizionato** (si veda pag. 104).

Quesito 5.3.3:

Un sacchetto contiene 12 caramelle delle quali 8 sono alla liquirizia e 4 sono alla menta. Dal sacchetto di 12 caramelle ne vengono estratte 3 a caso (senza riporle nel sacchetto). Qual è la probabilità di estrarre 3 caramelle alla liquirizia?

[A] 15/54 [B] 41/55 [C] 3/12 [D] 14/55 [E] 8/21

Ragionamento:

Con l'usuale ipotesi di equiprobabilità, la probabilità che la prima caramella sia alla liquirizia (L_1) è $P(L_1) = \frac{8}{12}$. Dopo aver tolto una caramella alla liquirizia, restano 7 caramelle alla liquirizia su 11 caramelle totali, quindi la probabilità che anche la seconda sia alla liquirizia è $P(L_2 | L_1) = \frac{7}{11}$. Analogamente, la terza sarà $P(L_3 | L_1 \wedge L_2) = \frac{6}{10}$. Segue che

$$P(L_1 \wedge L_2 \wedge L_3) = P(L_1)P(L_2 | L_1)P(L_3 | L_1 \wedge L_2) = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} = \frac{14}{55}.$$

Soluzione:

La risposta corretta è l'opzione [D].

6 Quesiti Riassuntivi

6.1	Insiemi	108
6.2	Relazioni	111
6.3	Logica Booleana	112
6.4	Logica dei predicati	115
6.5	Sequenze	118
6.6	Probabilità	119
6.7	Soluzioni	121

6.1 Insiemi

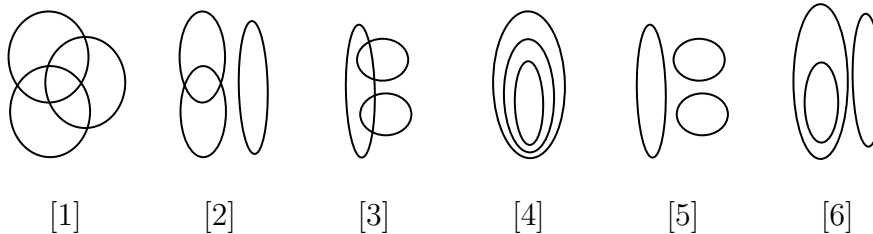


Figura 6.1

Quesito 6.1.1:

Facendo riferimento ai diagrammi della figura 6.1, individuare quale soddisfa la relazione insiemistica esistente tra i termini dati: Mammiferi, Animali domestici, Animali carnivori.

- [A] Diagramma 3
- [B] Diagramma 1
- [C] Diagramma 5
- [D] Diagramma 2
- [E] Diagramma 4

Quesito 6.1.2:

Facendo riferimento ai diagrammi della figura 6.1, individuare quale soddisfa la relazione insiemistica esistente tra i termini dati: Veicoli, Automobili, Auto elettriche.

- [A] Diagramma 3
- [B] Diagramma 6
- [C] Diagramma 5
- [D] Diagramma 2
- [E] Diagramma 4

Quesito 6.1.3:

Facendo riferimento ai diagrammi della figura 6.1, individuare quale soddisfa la relazione insiemistica esistente tra i termini dati: Rettangoli, Quadrati, Circonferenze.

- [A] Diagramma 3
- [B] Diagramma 6
- [C] Diagramma 5
- [D] Diagramma 2
- [E] Diagramma 4

Quesito 6.1.4:

Facendo riferimento ai diagrammi della figura 6.1, individuare quale soddisfa la relazione insiemistica esistente tra i termini dati: divisori diversi da 1 di 56, 35, e 22.

- [A] Diagramma 3
- [B] Diagramma 6
- [C] Diagramma 5
- [D] Diagramma 2
- [E] Diagramma 1

Quesito 6.1.5:

Facendo riferimento ai diagrammi della figura 6.1, individuare quale soddisfa la relazione insiemistica esistente tra i termini dati: Mammiferi, Rettili e Uccelli.

- [A] Diagramma 3
- [B] Diagramma 6
- [C] Diagramma 5
- [D] Diagramma 2
- [E] Diagramma 1

Quesito 6.1.6:

Facendo riferimento ai diagrammi della figura 6.1, individuare quale soddisfa la relazione insiemistica esistente tra i termini dati: numeri compresi tra 12 e 18, numeri compresi tra 5 e 9, e numeri compresi tra 7 e 10.

- [A] Diagramma 3
- [B] Diagramma 6
- [C] Diagramma 5
- [D] Diagramma 2
- [E] Diagramma 1

Quesito 6.1.7:

Per potersi laureare, gli studenti di filosofia devono obbligatoriamente superare un esame di *logica*, uno di *filosofia della scienza* e uno di *storia della filosofia antica*. Sappiamo inoltre che tutti i 700 iscritti al corso di laurea hanno già superato almeno un esame dei tre citati, che gli studenti che hanno dato logica sono 460, quelli che hanno superato filosofia della scienza sono 623 e quelli che hanno già superato storia della filosofia antica sono 561. Se gli studenti che hanno superato almeno due esami sono 1232, quanti studenti hanno superato tutti e tre gli esami?

- [A] 412 [B] 324 [C] 288 [D] 523 [E] 289

6.2 Relazioni

Quesito 6.2.1:

I signori Rossi hanno quattro figli e nessuno di questi è un gemello. Beatrice è più grande di Jacopo, Jacopo è più grande di Pia, Pia è più piccola di Beatrice e di Cosimo. Cosimo è più grande di Jacopo e più piccolo di Beatrice. Con quale ordine sono nati i fratelli Rossi?

- [A] Beatrice, Cosimo, Jacopo e Pia
- [B] Pia, Jacopo, Cosimo e Beatrice
- [C] Jacopo, Cosimo, Beatrice e Pia
- [D] Cosimo, Pia, Beatrice e Jacopo
- [E] Beatrice, Jacopo, Cosimo e Pia

Quesito 6.2.2:

Teresa è la primogenita di una coppia con due figli, e suo marito è figlio unico. Uno dei nonni del figlio di Teresa ha un figlio che si chiama Carlo, il quale ha tre anni più di Teresa. Chi è il Carlo di cui si parla nel testo?

- [A] Lo zio di Teresa
- [B] Il fratello di Teresa
- [C] Il padre di Teresa
- [D] Il marito di Teresa
- [E] Il figlio di Teresa

6.3 Logica Booleana

Quesito 6.3.1:

Il pasticcere Iginio deve consegnare una torta nuziale che deve essere pagata alla consegna. I soldi verranno consegnati ad un solo fattorino. Per portare la torta il fattorino, o i fattorini, hanno utilizzato il furgoncino di Iginio che può trasportare solo due persone. Quel giorno sono di turno Andrea, Benedetto, e Camillo. Sapendo che Camillo non lavora se non lavora anche Andrea e che Benedetto non sa guidare, allora:

- [A] Camillo sarà pagato e Andrea no
- [B] Né Benedetto né Camillo saranno pagati
- [C] Se Benedetto effettuerà la consegna, allora riceverà i soldi del pagamento
- [D] Se Camillo effettuerà la consegna allora lui o Andrea riceveranno i soldi della torta
- [E] Andrea sarà pagato

Quesito 6.3.2:

Solo se si è maggiorenni si può votare. Se la precedente affermazione è vera, allora è sicuramente vero che

- [A] Se si può votare, allora si è maggiorenni
- [B] Se non si è maggiorenni, allora non si può votare
- [C] Non si può votare o si è maggiorenni
- [D] Tutte le opzioni precedenti
- [E] Nessuna delle opzioni precedenti

Quesito 6.3.3:

Se è decorso il termine di prescrizione, allora il reato è estinto. Se la precedente affermazione è vera, allora è sicuramente vero che

- [A] Se il reato è estinto, allora è decorso il termine di prescrizione
- [B] Se non è decorso il termine di prescrizione, allora il reato non è estinto
- [C] Il reato è estinto solo se è decorso il termine di prescrizione
- [D] Se il reato non è estinto, allora non è decorso il termine di prescrizione
- [E] Nessuna delle opzioni precedenti

Quesito 6.3.4:

Ada, Bianca e Cecilia devono decidere se partire per le vacanze. Pongono le seguenti condizioni:

- Perché Bianca parta è necessario che parta Ada;
- Bianca parte se e solo se non parte Cecilia;
- A Cecilia basta che parta Ada.

Alla luce di queste richieste, quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- [A] Partono certamente tutte e tre
- [B] Ada parte certamente
- [C] Cecilia parte certamente e Bianca certamente non parte
- [D] Nessuna delle tre parte
- [E] Tutte e tre possono indifferentemente partire o non partire

Quesito 6.3.5:

Condizione necessaria e sufficiente affinché Cristina si trasferisca a Milano è che passi il test di accesso del Politecnico (di Milano). Se indichiamo con M il trasferimento di Cristina a Milano e con T il suo superamento del test del Politecnico, quale delle seguenti relazioni esprime in modo esatto quanto detto dalla frase proposta?

- [A] Solo se T allora M
- [B] Se T allora M
- [C] Se e solo se T , allora M
- [D] Se e solo se non M , allora T
- [E] Solo se T , allora M e se M allora T

Quesito 6.3.6:

Per cucinare una torta è necessario ma non sufficiente avere la farina o lo zucchero. Determinare quale delle seguenti situazioni NON è compatibile con questa affermazione.

- [A] Elisa ha lo zucchero, ma non riesce a cucinare una torta
- [B] Elisa è riuscita a cucinare una torta anche se non aveva la farina
- [C] Elisa non ha lo zucchero, ma è riuscita comunque a cucinare una torta
- [D] Elisa è riuscita a cucinare una torta anche se non ha né farina né zucchero
- [E] Elisa ha sia la farina che lo zucchero, ma non è riuscita lo stesso a cucinare una torta

6.4 Logica dei predicati

Quesito 6.4.1:

Se “tutti gli spartiati (cittadini a pieno titolo di Sparta) erano soldati”, si può concludere che

- [A] Nessun soldato era uno spartiata
- [B] Tutti i soldati erano spartiati
- [C] È esistito almeno un uomo che non era uno spartiata oppure che era un soldato
- [D] È esistito un uomo che era uno spartiata, ma non un soldato
- [E] Ogni soldato non è uno spartiata

Quesito 6.4.2:

Quale di questi ragionamenti è corretto dal punto di vista deduttivo?

- [A] Carlo frequenta la prima elementare. I bambini delle classi successive alla sua conoscono le tabelline. Quindi Carlo conosce le tabelline.
- [B] Se Carlo facesse pianoforte, saprebbe leggere uno spartito. Carlo non fa pianoforte, quindi non sa leggere uno spartito.
- [C] Carlo frequenta la prima elementare. I bambini delle classi successive alla sua conoscono le tabelline. Quindi Carlo non conosce le tabelline.
- [D] Carlo frequenta la prima elementare. Qualche bambino della prima elementare porta gli occhiali. Quindi Carlo porta gli occhiali.
- [E] Carlo suona il clarinetto. Chi suona il clarinetto sa leggere uno spartito. Quindi, Carlo sa leggere uno spartito.

Quesito 6.4.3:

La proposizione “nello scorso campionato tutti i centravanti hanno segnato almeno 4 gol” è falsa. Da questo segue^a:

- [A] tutti i centravanti hanno segnato meno di 4 gol
- [B] almeno un centravanti ha segnato meno di 4 gol
- [C] almeno un centravanti ha segnato più di 4 gol
- [D] tutti i centravanti hanno segnato più di 4 gol
- [E] almeno un centravanti ha segnato almeno 4 gol

^a<https://www.altamatematica.it/wp-content/uploads/2018/08/proveindam2013-14.pdf>

Quesito 6.4.4:

I materiali isolanti sono leggeri. I materiali plastici sono leggeri e flessibili. I materiali leggeri sono facili da tagliare. Se le precedenti affermazioni sono vere, allora è sicuramente vero che:

- [A] Tutti i materiali leggeri sono anche flessibili
- [B] I materiali isolanti sono flessibili
- [C] I materiali leggeri sono isolanti
- [D] I materiali flessibili sono facili da tagliare
- [E] I materiali plastici sono facili da tagliare

Quesito 6.4.5:

“Tutti i materiali isolanti non sono leggeri. I materiali plastici sono flessibili e leggeri. Tutto ciò che è leggero è facile da tagliare”. Quale delle seguenti affermazioni è una conseguenza delle precedenti?

- [A] I materiali leggeri sono flessibili
- [B] I materiali isolanti sono flessibili
- [C] I materiali leggeri sono isolanti
- [D] I materiali flessibili sono facili da tagliare
- [E] I materiali plastici sono facili da tagliare

Quesito 6.4.6:

“L'affermazione *Sotto ogni ombrellone c'è almeno un bagnante che non ha gli occhiali da sole* è falsa”. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- [A] Sotto ogni ombrellone ci sono solo bagnanti con gli occhiali da sole
- [B] C'è almeno un ombrellone sotto cui ogni bagnante ha gli occhiali da sole
- [C] C'è almeno un ombrellone senza bagnanti
- [D] C'è almeno un bagnante senza occhiali da sole
- [E] Nessuna delle precedenti

6.5 Sequenze

Quesito 6.5.1:

Individuare il numero che completa correttamente la seguente successione numerica [4, 11, 18, 25, 32, ...]

- [A] 41
- [B] 45
- [C] 38
- [D] 39
- [E] 43

Quesito 6.5.2:

Individuare il numero che completa correttamente la seguente successione numeri [3, 9, 36, 180, ...]

- [A] 1080
- [B] 900
- [C] 1100
- [D] 720
- [E] 540

6.6 Probabilità

Quesito 6.6.1:

Nella calza della befana ci sono tantissime caramelle: il 30% sono gelée alla frutta, il 40% sono cioccolatini e la parte restante sono caramelle gommose. Ogni dolcetto è confezionato singolarmente.

La Befana, però, ha sostituito il 10% di *ciascun tipo di dolcetto* (gelée, cioccolatini e caramelle gommose) con un pezzettino di carbone; al tatto, i dolcetti risultano indistinguibili.

Anna pesca a caso un dolcetto dalla calza. Vorrebbe che fosse una gelée alla frutta oppure una caramella gommosa e, naturalmente, spera di non pescare il carbone.

Qual è la probabilità che il dolcetto pescato sia del tipo desiderato?

- [A] 0,27
- [B] 0,30
- [C] 0,54
- [D] 0,60
- [E] 0,63

Quesito 6.6.2:

In un'urna ci sono 10 biglie nere e 3 rosse. Quante biglie rosse bisogna aggiungere per fare in modo che la probabilità di estrarre una biglia nera sia pari a $1/4$?

- [A] 27
- [B] 7
- [C] 72
- [D] 21
- [E] 14

Quesito 6.6.3:

Qual è la probabilità di estrarre da un mazzo di 52 carte da gioco una carta che NON sia di cuori?

- [A] 60%
- [B] 75%
- [C] 50%
- [D] 25%
- [E] 90%

Quesito 6.6.4:

In una pista di atletica leggera ci sono 8 corsie, numerate da 1 a 8 dalla più interna alla più esterna. Per assegnare le corsie per la gara dei 1000 metri, gli 8 atleti estraggono a sorte una biglia numerata. Nel sacchetto delle biglie ci sono 100 biglie (numerate da 1 a 100) e l'ordine nelle corsie è determinato dal numero che estraggono gli atleti. Il primo a pescare è Riccardo, che pesca il 37. Dopo aver pescato, la biglia non viene reimmessa nel sacchetto. Che probabilità ha Diego, il secondo atleta a pescare, che gli venga assegnata una corsia più esterna di quella di Riccardo?

- [A] $\frac{4}{20}$
- [B] $\frac{7}{12}$
- [C] $\frac{5}{13}$
- [D] $\frac{7}{11}$
- [E] $\frac{6}{32}$

6.7 Soluzioni

Nelle soluzioni dei quesiti di logica Booleana abbrevieremo l'espressione A è *falso* con $v(A) = 0$, e analogamente A è *vero* con $v(A) = 1$.

Soluzione del Quesito 6.1.1

Indichiamo con M , D e C rispettivamente l'insieme dei mammiferi, degli animali domestici e dei carnivori. L'intersezione tra M e D è non vuota ($M \cap D \neq \emptyset$), infatti i conigli sono sia mammiferi che animali domestici. Inoltre $M \not\subseteq D$ e $D \not\subseteq M$, i.e. non tutti i mammiferi sono animali domestici, e.g. i capodogli, e non tutti gli animali domestici sono mammiferi, e.g. il pesce rosso. In modo analogo si osserva che $D \cap C \neq \emptyset$, $D \not\subseteq C$ e $C \not\subseteq D$; lo stesso vale per M e C . La soluzione al quesito è l'opzione [B].

Soluzione del Quesito 6.1.2

Ogni auto elettrica è un'auto e ogni auto è un veicolo. La risposta al quesito è l'opzione [E].

Soluzione del Quesito 6.1.3

Indichiamo con R , Q e C gli insiemi di rettangoli, quadrati e circonferenze. Ogni quadrato è un rettangolo particolare, ma non ogni rettangolo è un quadrato, i.e. $Q \subsetneq R$. Ma nessuna circonferenza è un rettangolo o quadrato, i.e. $C \cap R = \emptyset$ e $C \cap Q = \emptyset$. La risposta al quesito è l'opzione [B].

Soluzione del Quesito 6.1.4

I divisori di 56 diversi da 1 sono: 2, 4, 7, 8, 14, 28 e 56. I divisori di 35 diversi da 1 sono: 5, 7 e 35. I divisori di 22 diversi da 1 sono: 2, 11, 22. Quindi, la soluzione del quesito è l'opzione [A].

Soluzione del Quesito 6.1.5

I tre insiemi di animali sono disgiunti e la risposta al quesito è l'opzione [C].

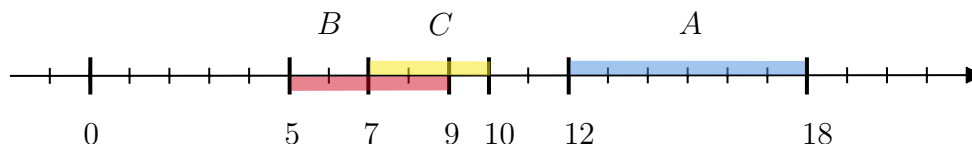
Soluzione del Quesito 6.1.6

Rappresentiamo sulla retta dei numeri i tre insiemi numerici:

$$A = \{x \mid 12 \leq x \leq 18\}$$

$$B = \{x \mid 5 \leq x \leq 9\}$$

$$C = \{x \mid 7 \leq x \leq 10\}$$



Quindi, la soluzione al quesito è l'opzione [D].

Soluzione del quesito 6.1.7

Indichiamo con L l'insieme degli studenti che hanno superato l'esame di logica, con F l'insieme degli studenti che hanno superato l'esame di filosofia della scienza e con S l'insieme degli studenti che hanno superato l'esame di storia della filosofia antica. Dai dati e dalla legge di inclusione esclusione sappiamo che

$$\begin{aligned} |L \cup F \cup S| &= |L| + |F| + |S| - |L \cap F| - |F \cap S| - |L \cap S| + |L \cap F \cap S| \\ 700 &= 460 + 623 + 561 - 1232 + |L \cap F \cap S| \end{aligned}$$

Segue che $|L \cap F \cap S| = 288$ e la risposta corretta al quesito è l'opzione [C].

Soluzione del quesito 6.2.1

Per rappresentare i dati del quesito è utile costruire un grafo diretto. Se x è più piccolo di y (equivalentemente, y è più grande di x), allora nel grafo avremo che $x \rightarrow y$.

Analizziamo i dati indicando di volta in volta la loro rappresentazione.

Beatrice è più grande di Jacopo: $J \rightarrow B$

Jacopo è più grande di Pia: $P \rightarrow J$

Pia è più piccola di Beatrice e di Cosimo: $P \rightarrow B$ e $P \rightarrow C$

Cosimo è più grande di Jacopo: $J \rightarrow C$

Cosimo è più piccolo di Beatrice: $C \rightarrow B$

Nella Figura 6.2, sulla sinistra sono rappresentati tutti i dati del problema, mentre nel grafo sulla destra sono state eliminate le frecce ricavabili dalla transitività della relazione "essere più piccolo di". Ne segue che i fratelli sono nati nell'ordine (dal più grande al più piccolo): Beatrice, Cosimo, Jacopo e Pia. La risposta corretta al quesito è l'opzione [A].

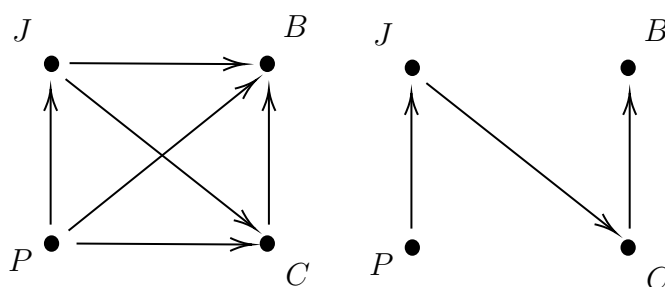


Figura 6.2: Grafo diretto del quesito 6.2.1

Soluzione del quesito 6.2.2

Per poter ragionare sulle relazioni familiari, è utile scomporre i dati del quesito per ricostruire l'albero genealogico. Il primo dato che abbiamo è che Teresa è primogenita di una coppia con due figli. Quindi Teresa ha un fratello o una sorella minore. I nonni del figlio di Teresa sono i genitori di Teresa oppure i genitori del marito di Teresa e questi hanno un figlio di nome Carlo. Quindi Carlo potrebbe essere il fratello minore di Teresa o suo marito. L'ultimo dato ci dice che Carlo ha tre anni più di Teresa, quindi non può essere suo fratello minore. Segue che Carlo è il marito di Teresa e la risposta corretta è l'opzione [D]. Si veda la Figura 6.3 per la rappresentazione grafica.

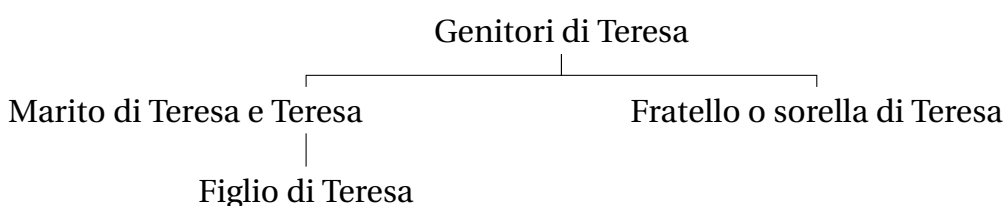


Figura 6.3: Albero genealogico di Teresa

Soluzione del quesito 6.3.1

Per poter consegnare la torta, serve almeno un fattorino che lavori e che sappia guidare. Visto che Benedetto non sa guidare, per poter effettuare la consegna è necessario che Andrea o Camillo guidi il furgoncino.

Variabili per la consegna. Definiamo A, B, C come segue:

- A : “Andrea effettua la consegna”;
- B : “Benedetto effettua la consegna”;
- C : “Camillo effettua la consegna”.

Quindi deve valere $A \vee C$ (qualcuno deve guidare). Inoltre “Camillo non lavora se non lavora anche Andrea” si formalizza come

$$\neg A \rightarrow \neg C,$$

che è logicamente equivalente a $C \rightarrow A$. Dato che il furgoncino può trasportare solo due persone, segue che

$$\neg(A \wedge B \wedge C).$$

Prima di analizzare le opzioni del quesito, individuamo le situazioni compatibili con i dati:

	A	B	C	$A \vee C$	$C \rightarrow A$	$\neg(A \wedge B \wedge C)$
s_1	0	0	0	0	1	1
s_2	1	0	0	1	1	1
s_3	0	1	0	0	1	1
s_4	0	0	1	1	0	1
s_5	0	1	1	1	0	1
s_6	1	0	1	1	1	1
s_7	1	1	0	1	1	1
s_8	1	1	1	1	1	0

Le situazioni compatibili con i dati sono tre: $s_2 = (1, 0, 0)$, $s_6 = (1, 0, 1)$ e $s_7 = (1, 1, 0)$.

Variabili per il pagamento. Introduciamo ora P_A, P_B, P_C per indicare chi riceve i soldi:

P_A : “Andrea viene pagato”;

P_B : “Benedetto viene pagato”;

P_C : “Camillo viene pagato”.

Poiché i soldi vengono consegnati a *un solo* fattorino e solo chi effettua la consegna può essere pagato, in ciascuna situazione compatibile vale esattamente uno tra i pagamenti dei consegnanti.

- In s_2 consegna solo Andrea, quindi segue $P_A \wedge \neg P_B \wedge \neg P_C$.
- In s_6 consegnano Andrea e Camillo, quindi segue

$$(P_A \wedge \neg P_B \wedge \neg P_C) \vee (\neg P_A \wedge \neg P_B \wedge P_C).$$

- In s_7 consegnano Andrea e Benedetto, quindi segue

$$(P_A \wedge \neg P_B \wedge \neg P_C) \vee (\neg P_A \wedge P_B \wedge \neg P_C).$$

Analisi delle opzioni.

[A] $P_C \wedge \neg P_A$ non segue dai dati: in s_2 vale P_A ;

[B] $\neg P_B \wedge \neg P_C$ non segue dai dati: in s_6 può valere P_C , in s_7 può valere P_B ;

[C] $B \rightarrow P_B$ non segue dai dati: in s_7 è possibile che venga pagato Andrea (P_A);

- [D] $C \rightarrow (P_A \vee P_C)$ segue dai dati: l'unica situazione compatibile con C è s_6 , e lì viene pagato o Andrea o Camillo;
- [E] $(A \wedge C) \rightarrow P_A$ non segue dai dati: in s_6 è possibile che venga pagato Camillo (P_C).

Quindi l'opzione corretta è [D].

Soluzione del quesito 6.3.2

Definiamo le variabili proposizionali M e V come segue.

M : "essere maggiorenni";

V : "poter votare".

Come nel quesito 2.2, il termine *solo se* indica che la proposizione che la segue è una condizione necessaria per la verità della proposizione principale. Quindi, se si può votare, allora necessariamente si è anche maggiorenni, i.e.

$$V \rightarrow M.$$

Formalizziamo ora le prime tre opzioni del quesito.

- [A] $V \rightarrow M$ è esattamente la formalizzazione della proposizione in oggetto. Tuttavia, per poter rispondere al quesito, è necessario (!) analizzare anche le opzioni [B] e [C]. Se anche queste dovessero seguire logicamente da $V \rightarrow M$, allora l'opzione [D] sarebbe quella corretta. Dato che per ogni quesito esiste solo una risposta corretta, non può essere che due delle prime tre opzioni siano vere ed una sia falsa.
- [B] $\neg M \rightarrow \neg V$ è il contronominale dell'implicazione $V \rightarrow M$. Come già osservato nei quesiti precedenti $\neg M \rightarrow \neg V$ è logicamente equivalente a $V \rightarrow M$. Quindi, l'enunciato dell'opzione [B] segue da $V \rightarrow M$. A questo punto, per le osservazioni fatte in precedenza, possiamo concludere che [C] è la risposta corretta del quesito. Per completezza analizziamo anche l'opzione [C].
- [C] $\neg V \vee M$ è logicamente equivalente a $V \rightarrow M$. Per verificarlo, costruiamo la corrispondente tavola di verità.

M	V	$V \rightarrow M$	$\neg V$	$\neg V \vee M$
0	0	1	1	1
1	0	1	1	1
0	1	0	0	0
1	1	1	0	1

Soluzione del quesito 6.3.3

Il decorrere del termine di prescrizione (P) è condizione sufficiente per l'estinzione del reato (E), i.e.

$$P \rightarrow E.$$

Verifichiamo ora se la formalizzazione delle opzioni segue logicamente da $P \rightarrow E$.

- [A] $E \rightarrow P$ non segue da $P \rightarrow E$;
- [B] $\neg P \rightarrow \neg E$ è logicamente equivalente a $E \rightarrow P$;
- [C] $E \rightarrow P$ non segue da $P \rightarrow E$;
- [D] $\neg E \rightarrow \neg P$ è logicamente equivalente a $P \rightarrow E$. Quindi l'opzione [D] è la risposta corretta.

Soluzione del quesito 6.3.4

Abbreviamo le proposizioni elementari:

- A : "Ada parte";
- B : "Bianca parte";
- C : "Cecilia parte".

I dati:

1. $B \rightarrow A$;
2. $(B \rightarrow \neg C) \wedge (\neg C \rightarrow B)$;
3. $A \rightarrow C$.

Si arriva immediatamente alla soluzione con la Tabella 6.1.

	A	B	C	$B \rightarrow A$	$(B \rightarrow \neg C) \wedge (\neg C \rightarrow B)$	$A \rightarrow C$
s_1	1	1	1	1	0	1
s_2	1	1	0	1	1	0
s_3	1	0	1	1	1	1
s_4	1	0	0	1	0	0
s_5	0	1	1	0	0	1
s_6	0	1	0	0	1	1
s_7	0	0	1	1	1	1
s_8	0	0	0	1	0	1

Tabella 6.1: La soluzione dei vincoli posti da Ada, Bianca e Cecilia

1. Poiché s_3 ed s_7 sono le uniche due situazioni che soddisfano tutte le richieste delle tre amiche, e poiché entrambe rendono vera C , segue che Cecilia partirà di sicuro. Di conseguenza, le opzioni [D] e [E] sono errate.
2. Poiché s_3 ed s_7 sono le uniche due situazioni che soddisfano tutte le richieste delle tre amiche, e poiché entrambe rendono falsa B , segue che Bianca sicuramente non partirà. Di conseguenza, l'opzione [A] è falsa.
3. Poiché s_3 ed s_7 sono le uniche due situazioni che soddisfano tutte le richieste delle tre amiche, e poiché s_7 rende falsa A , non è certo che Ada parta. Di conseguenza, l'opzione [B] è falsa.

L'opzione [C] è quella corretta.

Soluzione del quesito 6.3.5

Utilizzando le variabili proposizionali introdotte nel quesito, la frase “Condizione necessaria e sufficiente affinché Cristina si trasferisca a Milano è che passi il test di accesso del Politecnico” si formalizza come

$$M \leftrightarrow T.$$

Completiamo la formalizzazione delle opzioni per capire quale di queste esprime esattamente $M \leftrightarrow T$.

- [A] $M \rightarrow T$, i.e. T è condizione necessaria per M ;
- [B] $T \rightarrow M$, i.e. T è condizione sufficiente per M ;
- [C] $T \leftrightarrow M$;
- [D] $\neg M \leftrightarrow T$;
- [E] $(M \rightarrow T) \wedge (M \rightarrow T)$.

L'opzione [C] è quella corretta.

Soluzione del quesito 6.3.6

Il modo più veloce per risolvere il quesito consiste nell'abbreviare la proposizione in oggetto, le opzioni date e cercare una situazione s che renda vera la formalizzazione di una delle opzioni e falsa la proposizione.

Definiamo le variabili proposizionali T , Z e F come segue.

T : “cucinare una torta”;

F : “avere la farina”;

Z : “avere lo zucchero”.

La proposizione “per cucinare una torta è necessario ma non sufficiente avere la farina o lo zucchero” si formalizza come

$$T \rightarrow (F \vee Z).$$

Infatti, se non si hanno né farina né zucchero ($\neg(F \vee Z) = \neg F \wedge \neg Z$) allora non si può neanche cucinare una torta ($\neg T$). È *necessario* avere la farina o lo zucchero per poter cucinare una torta.

Sappiamo che $v(T \rightarrow (F \vee Z)) = 0$ sse $v(T) = 1$ e $v(F \vee Z) = 0$, i.e. $v(T) = 1$, $v(F) = 0$ e $v(Z) = 0$. Procediamo formalizzando le opzioni date e verificando se dall’assumere queste vere segue che $v(T \rightarrow (F \vee Z)) = 0$.

- [A] $Z \wedge \neg T$: se $v(Z \wedge \neg T) = 1$ allora $v(Z) = 1$ e $v(T) = 0$. A prescindere dal valore di verità di F , segue che $v(T \rightarrow (F \vee Z)) = 1$ e questa situazione è compatibile con la proposizione data.
- [B] $T \wedge \neg F$: se $v(T \wedge \neg F) = 1$ allora $v(T) = 1$ e $v(F) = 0$. Tuttavia potrebbe essere che $v(Z) = 1$ rendendo vera $T \rightarrow (F \vee Z)$. Quindi, questa situazione è compatibile con la proposizione data.
- [C] Con un argomento simile a quello dell’opzione precedente, anche questa situazione è compatibile con la proposizione data.
- [D] $T \wedge \neg F \wedge \neg Z$: se $v(T \wedge \neg F \wedge \neg Z) = 1$, allora $v(T) = 1$, $v(F) = 0$ e $v(Z) = 0$. Segue che $v(T \rightarrow (F \vee Z)) = 0$. Quindi questa situazione NON è compatibile con la proposizione data e l’opzione [D] è quella corretta.
- [E] $F \wedge Z \wedge \neg T$: se $v(F \wedge Z \wedge \neg T) = 1$, allora $v(T) = 0$, $v(F) = 1$ e $v(Z) = 1$. Segue che $v(T \rightarrow (F \vee Z)) = 1$. Quindi questa situazione è compatibile con la proposizione data.

Soluzione del quesito 6.4.1

Definiamo i predicati S e M come segue.

$S(x)$: “ x è uno spartiata”;

$M(x)$: “ x è un soldato”.

La proposizione iniziale si può abbreviare con

$$\forall x(S(x) \rightarrow M(x)).$$

Per risolvere il quesito, formalizziamo le opzioni date.

- [A] $\forall x(M(x) \rightarrow \neg S(x))$ contraddice la proposizione iniziale che dice che l’insieme degli spartiati è un sottoinsieme dei soldati.

- [B] $\forall x(M(x) \rightarrow S(x))$ questa è l'inversa della premessa, quindi non segue da essa.
- [C] $\exists x(\neg S(x) \vee M(x))$ segue da $\forall x((S(x) \rightarrow M(x)))$. Infatti, $\exists x(\neg S(x) \vee M(x)) \equiv \exists x(S(x) \rightarrow M(x))$ e da una quantificazione universale segue sempre la corrispondente esistenziale. L'opzione [C] è quella corretta.
- [D] $\exists x(S(x) \wedge \neg M(x))$. contraddice la premessa.
- [E] $\forall x(M(x) \rightarrow \neg S(x))$ si veda l'opzione [A].

Soluzione del quesito 6.4.2

Definiamo i seguenti insiemi definiti nell'insieme universo U dei bambini che frequentano la scuola primaria di Carlo.

- $P = \{x \mid x \text{ frequenta la prima elementare}\}$
- $T = \{x \mid x \text{ conosce le tabelline}\}$
- $F = \{x \mid x \text{ va a scuola di pianoforte}\}$
- $S = \{x \mid x \text{ sa leggere uno spartito}\}$
- $O = \{x \mid x \text{ porta gli occhiali}\}$
- $C = \{x \mid x \text{ suona il clarinetto}\}$

Analizziamo le opzioni una ad una.

- [A] Se indichiamo con c l'elemento corrispondente a Carlo, allora abbiamo che $c \in P$ (Carlo frequenta la prima elementare). Inoltre sappiamo che $P^c \subseteq T$, ma da questo non segue che $c \in T$. Infatti entrambe le combinazioni della Figura 6.4 sono compatibili con le premesse dell'opzione [A].

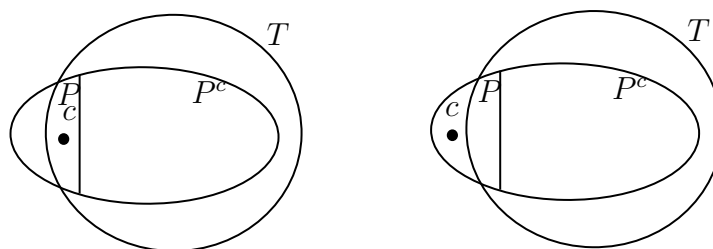


Figura 6.4: Rappresentazione delle configurazioni compatibili con le premesse dell'opzione [A]

- [B] Questa proposizione ci dice che $F \subseteq S$, ovvero che chi suona il pianoforte sa leggere uno spartito. Tuttavia, ciò non esclude che qualcuno possa saper leggere uno spartito anche senza saper suonare il pianoforte. Nella Figura 6.5 sono riportate le configurazioni compatibili con le premesse dell'opzione [B].
- [C] Per lo stesso motivo per cui il ragionamento della proposizione [A] non è corretto, anche quello dell'opzione [C] non lo è.
- [D] Questa proposizione ci dice che l'insieme dei bambini della prima elementare e l'insieme dei bambini che portano gli occhiali è non-vuoto, i.e. $P \cap O \neq \emptyset$.

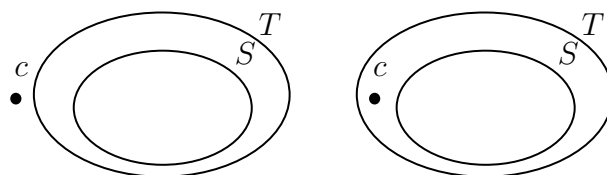


Figura 6.5: Rappresentazione delle configurazioni compatibili con le premesse dell'opzione [B]

Tuttavia, Carlo potrebbe sia portare gli occhiali, che no. Il ragionamento di questa opzione non è corretto. Nella Figura 6.6 sono riportate le configurazioni compatibili con le premesse dell'opzione [D].

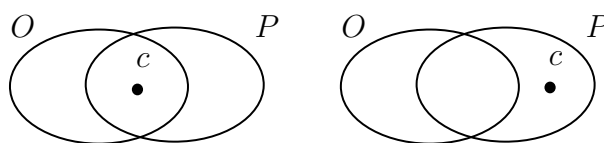


Figura 6.6: Rappresentazione delle configurazioni compatibili con le premesse dell'opzione [D]

[E] Queste proposizioni dicono che l'insieme di chi suona il clarinetto è contenuto in quello di chi sa leggere uno spartito. Per cui Carlo, che appartiene al primo insieme, appartiene necessariamente anche al secondo, i.e. da $C \subseteq S$ e $c \in C$, segue che $c \in S$. Si veda la Figura 6.7 per la rappresentazione grafica. Segue che l'opzione [E] è quella corretta.

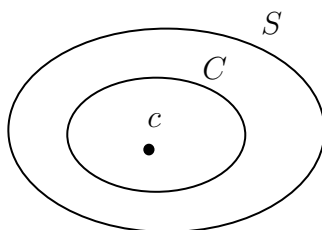


Figura 6.7: Rappresentazione dell'opzione [E]

Soluzione del quesito 6.4.4

Definiamo i predicati L , F , I , T e P come segue.

- $L(x)$: “ x è un materiale leggero”;
- $F(x)$: “ x è un materiale flessibile”;
- $I(x)$: “ x è un materiale isolante”;
- $T(x)$: “ x è facile da tagliare”;
- $P(x)$: “ x è un materiale plastico”.

La proposizione “i materiali isolanti sono leggeri” la possiamo abbreviare come

$$\forall x(I(x) \rightarrow L(x)).$$

La seconda premessa “i materiali plastici sono leggeri e flessibili” la possiamo abbreviare come

$$\forall x(P(x) \rightarrow (L(x) \wedge F(x))).$$

L'ultima premessa “i materiali leggeri sono facili da tagliare” la possiamo abbreviare come

$$\forall x(L(x) \rightarrow T(x)).$$

Utilizzando gli stessi predicati, formalizziamo le opzioni del quesito e cerchiamo quale tra queste segue dalle premesse.

- [A] $\forall x(L(x) \rightarrow F(x))$ non segue dalle premesse. L'unica cosa che possiamo dire sui materiali leggeri è che sono facili da tagliare (terza premessa) e che se un materiale non è leggero, allora non è isolante (prima premessa).
- [B] $\forall x(I(x) \rightarrow F(x))$ non segue dalle premesse. L'unico modo per dedurre che un materiale è flessibile viene dalla seconda premessa. Tuttavia occorre sapere che questo sia un materiale plastico.
- [C] $\forall x(L(x) \rightarrow I(x))$ non segue dalle premesse.
- [D] $\forall x(F(x) \rightarrow T(x))$ non segue dalle premesse.
- [E] $\forall x(P(x) \rightarrow T(x))$ segue dalle premesse. Infatti, dalla seconda premessa segue che $\forall x(P(x) \rightarrow L(x))$. Inoltre, $\forall x(L(x) \rightarrow T(x))$. Quindi, $\forall x(P(x) \rightarrow T(x))$.

Soluzione del Quesito 6.4.6

Indichiamo con A la proposizione “Sotto ogni ombrellone c'è almeno un bagnante che non ha gli occhiali da sole”. L'esercizio ci chiede di trovare la negazione di A . Definiamo i seguenti insiemi e predicati:

O : l'insieme di tutti gli ombrelloni;

B : l'insieme di tutti i bagnanti;

$S(b, o)$: “il bagnante b è sotto l'ombrellone o ”;

$G(b)$: “il bagnante b ha gli occhiali da sole”.

La proposizione A può essere formalizzata nel seguente modo:

$$\forall o \in O, \exists b \in B \text{ tale che } S(b, o) \wedge \neg G(b).$$

La sua negazione $\neg A$ è

$$\neg(\forall o \in O, \exists b \in B \text{ tale che } S(b, o) \wedge \neg G(b)) \equiv \exists o \in O, \forall b \in B \text{ vale } \neg(S(b, o) \wedge \neg G(b))$$

$$\equiv \exists o \in O, \forall b \in B \text{ vale } \neg S(b, o) \vee G(b) \equiv \exists o \in O, \forall b \in B \text{ vale } S(b, o) \rightarrow G(b).$$

La proposizione $\neg A$ si può leggere come “esiste un ombrellone tale che per ogni bagnante, se il bagnante è sotto quell’ombrellone, allora ha gli occhiali da sole”. L’opzione B è “C’è almeno un ombrellone sotto cui ogni bagnante ha gli occhiali da sole”. Questa opzione corrisponde alla negazione di A.

Soluzione del Quesito 6.5.1

Osserviamo che la differenza tra due termini consecutivi è costante:

$$11 - 4 = 7, \quad 18 - 11 = 7, \quad 25 - 18 = 7, \quad 32 - 25 = 7.$$

Quindi, il termine successivo è $32 + 7 = 39$ e la risposta corretta è [D].

Soluzione del Quesito 6.5.2

Osserviamo che ogni termine della successione si ottiene moltiplicando il precedente per un numero che cresce di 1:

$$3 \cdot 3 = 9, \quad 9 \cdot 4 = 36, \quad 36 \cdot 5 = 180.$$

Il fattore successivo è quindi 6, e il termine seguente è

$$180 \cdot 6 = 1080.$$

La risposta corretta è [A].

Soluzione del Quesito 6.6.1

I dati del quesito ci dicono che il 30% dei dolcetti della calza sono gelée alla frutta, il 40% sono cioccolatini e la parte restante sono caramelle gommosi. Segue che le caramelle gommosi sono il 30% dei dolcetti.

Definiamo gli eventi F , C , G e D come segue:

F : “Anna pesca una gelée alla frutta”

C : “Anna pesca un cioccolatino”

G : “Anna pesca una caramella gommosa”

D : “Anna pesca del carbone” (D sta per *difettoso*)

Se $P(D|F) = P(D|C) = P(D|G) = 0.1$ (il 10% di ogni tipo di dolcetto contiene carbone) allora $P(\neg D|F) = P(\neg D|C) = P(\neg D|G) = 0.9$, i.e. la probabilità di pescare un dolcetto *non-difettoso* (non di carbone) è del 90%.

Segue che

$$\begin{aligned}
 P((F \wedge \neg D) \vee (G \wedge \neg D)) &= P(F \wedge \neg D) + P(G \wedge \neg D) \\
 &= P(\neg D|F)P(F) + P(\neg D|G)P(G) \\
 &= 0.9 \times 0.3 + 0.9 \times 0.3 \\
 &= 0.54
 \end{aligned}$$

L'opzione giusta è la [C].

Soluzione del Quesito 6.6.2

Se con N indichiamo l'evento "si estrae una biglia nera" e se indichiamo con x il numero di biglie rosse da aggiungere all'urna, segue che:

$$\begin{aligned}
 P(N) &= \frac{\text{numero di biglie nere}}{\text{numero di biglie nere} + \text{numero di biglie rosse}} \\
 &= \frac{10}{10+3+x} \\
 &= \frac{10}{13+x}
 \end{aligned}$$

Imponendo $P(N) = 1/4$, abbiamo che $\frac{10}{13+x} = \frac{1}{4}$. Segue che $x = 27$ e l'opzione corretta è la [A].

Soluzione del Quesito 6.6.3

In un mazzo di 52 carte ci sono 4 semi (cuori, quadri, fiori e picche), ciascuno composto da 13 carte. Se indichiamo con C l'evento "estrarre una carta di cuori", segue che $P(C) = \frac{13}{52}$ e $P(\neg C) = 1 - P(C) = 1 - \frac{13}{52} = \frac{39}{52} = \frac{3}{4} = 0,75 = 75\%$. La risposta corretta è l'opzione [B].

Soluzione del Quesito 6.6.4

Poiché l'assegnazione delle corsie segue l'ordine dei numeri estratti, Diego avrà una corsia più esterna di Riccardo se e solo se estrae un numero maggiore di 37. Dopo l'estrazione di Riccardo (37), restano 99 biglie. Tra queste, quelle maggiori di 37 sono i numeri da 38 a 100, cioè 63 biglie. Quindi

$$P(D_{\geq 38}) = \frac{63}{99} = \frac{7}{11}$$

dove $D_{\geq 38}$ indica l'evento "Diego pesca una biglia con un numero maggiore o uguale a 38".

L'opzione corretta è la [D].

Parte II

Teoria e metodologia logica proposizionale

Intermezzo

I capitoli che seguono vi offrono una rivisitazione teorica e metodologica dei concetti logici messi in pratica nella risoluzione dei quesiti della Parte I.

Per marcare la differenza tra l'uso informale e quello teorico dello strumento logico useremo le seguenti variazioni terminologiche.

Parte 1	Parte 2
proposizione	enunciato
tavola di verità	matrice booleana
situazione	valutazione

La differenza è questa: il termine usato nella Parte I è introdotto e spiegato in modo informale, mentre il suo corrispettivo della Parte II è suscettibile di definizione matematicamente rigorosa.

Per mantenere la trattazione elementare, ci limiteremo a considerare la logica Booleana (e quindi non quella del primo ordine), che in questa parte chiameremo logica proposizionale.

7 Sintassi: Induzione e ricorsione

In logica, la **sintassi** riguarda le regole di formazione degli oggetti del ragionamento. Potete pensarla con buona approssimazione come alla grammatica. Non vi dice cosa significhi una parola (questo è l'ambito della *semantica*, oggetto dei prossimi capitoli), ma vi dice se una certa sequenza di simboli è o meno una parola inclusa nel vocabolario (per esempio italiano).

Nell'ambito della logica Booleana, o **proposizionale**, la sintassi è introdotta dalle **regole** che consentono di costruire formule più complesse a partire da formule più semplici mediante l'uso dei connettivi.

La caratteristica centrale della sintassi logica è che le sue espressioni che qui chiamiamo **formule** sono prive di ambiguità: abbiamo una procedura algoritmica per decidere se una data espressione simbolica appartiene oppure no all'insieme delle formule.

7.1	Sintassi proposizionale . . .	140
7.2	La natura ricorsiva della sintassi proposizionale (★)	143
7.3	Una definizione formale dell'insieme \mathcal{FL} (★)	146
7.4	Esercizi	152

7.1 Sintassi proposizionale

Come avete potuto osservare, l'oggetto del ragionamento e dell'argomentazione logica nella Parte I sono le *proposizioni*. La proprietà caratteristica di quelle trattabili attraverso la logica Booleana è che, se impostiamo un esperimento per verificare se sono vere, il risultato sarà uno e uno solo tra “Sì” oppure “No”.

Nella logica proposizionale è consuetudine riferirsi a tali proposizioni come **formule** (o talvolta **enunciati**). La proprietà caratteristica dell'insieme delle formule è la sua natura **ricorsiva**. Prima di definirla rigorosamente, è utile illustrarla informalmente.

Ecco l'idea: se A è una formula e B è una formula, allora $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ sono a loro volta tutte formule, e si leggono rispettivamente come:

- Non è vero che A
- A e B
- A o B
- Se A allora B
- A se e solo se B .

Per il momento, non bisogna associare alcun significato a queste espressioni oltre alla loro natura sintattica. La definizione del significato dei connettivi e delle formule che li contengono sarà fornita nel Capitolo 9. Fino ad allora, è dannoso, piuttosto che utile, attribuire un significato “intuitivo” a tali espressioni. Il loro significato sintattico risiede nelle regole che governano la formazione dell'insieme delle formule, a cui ora ci rivolgiamo.

7.1.1 Le variabili proposizionali

Tra le formule vi è un insieme speciale, indicato con \mathcal{L} , caratterizzato dalla proprietà che i suoi elementi sono formule in cui non compare alcun connettivo.

È consuetudine indicare gli elementi di \mathcal{L} con lettere latine minuscole prese dal segmento finale dell'alfabeto. Per i nostri scopi sarà sufficiente prenderne solo un numero finito.

Terminologia e Notazione: Variabili proposizionali

Chiamiamo l'insieme

$$\mathcal{L} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$$

l'insieme delle variabili proposizionali oppure il linguaggio proposizionale \mathcal{L} . ◀

7.1.2 L'insieme delle formule

Terminologia e Notazione: Elementi della sintassi proposizionale

Indichiamo formule arbitrarie con lettere prese dalla parte iniziale dell'alfabeto (A, B, C ecc.) e insiemi di formule con lettere della parte finale dell'alfabeto (X, Y, Z). ◀

L'insieme infinito (!) delle formule di \mathcal{FL} viene costruito *ricorsivamente* a partire dal linguaggio (finito) \mathcal{L} e dai quattro connettivi $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ come segue:

1. $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{FL}$;
2. se $A, B \in \mathcal{FL}$ allora
 - $(\neg A) \in \mathcal{FL}$
 - $(A \wedge B) \in \mathcal{FL}$
 - $(A \vee B) \in \mathcal{FL}$
 - $(A \rightarrow B) \in \mathcal{FL}$.

La natura ricorsiva della definizione emerge chiaramente se osservate che per definire l'insieme \mathcal{FL} lo si usa durante la costruzione. Vi potrebbe venire il sospetto che la definizione sia malposta in quanto circolare. Se volete fugarlo subito potete immediatamente saltare alla Sezione 7.2. Siccome è un po' formale, se non vi sentite immediatamente a vostro agio, potete continuare a costruire un po' di intuizione finendo questa Sezione.

La clausola 1. stipula che le variabili proposizionali sono formule. Sono infatti i mattoni con cui costruiamo tutte le altre formule.

La clausola 2 prevede quattro sottocasi, uno per ogni connettivo. Congiuntamente ci dicono che possiamo costruire formule via via sempre più complicate a partire da formule costruite precedentemente a cui aggiungiamo opportunamente i connettivi.

7.1.3 Sottoformule

Terminologia e Notazione: sottoformule (o sottoenunciati)

Ogni enunciato A che non è una variabile proposizionale contiene un connettivo che viene chiamato **il connettivo principale di A** . Si tratta di quel connettivo che divide A in due formule, chiamate **le sottoformule immediate di A** . ◀

Confronta

$$A = ((p \rightarrow q) \wedge r) \tag{7.1}$$

con

$$B = (p \rightarrow (q \wedge r)). \tag{7.2}$$

Come stringhe di caratteri, divergono sul secondo elemento, che è “(” in (7.1) e “p” in (7.2). Quindi sono elementi distinti di \mathcal{FL} . Si nota che il connettivo principale di A è “ \wedge ”, mentre quello di B è “ \rightarrow ”.

Ogni enunciato ha almeno una sottoformula. Se $A = p$, allora l’unica sottoformula di A è A stesso. Se $A = \neg B$ allora la sua **sottoformula immediata** è B , mentre ogni sottoformula di B è un subenunciato di A . Analogamente, per qualsiasi connettivo binario $*$, A e B sono le sottoformule immediate di $(A * B)$, e l’insieme delle sottoformule di $(A * B)$ è l’unione dell’insieme delle sottoformule di A e dell’insieme delle sottoformule di B . In simboli e con una notazione autoesplicitiva:

$$Sub(A * B) = \{A * B\} \cup Sub(A) \cup Sub(B).$$

Ci riferiamo a un subenunciato di A che non è esso stesso A come a una **sottoformula propria di A** .

Esempio:

Considerate di nuovo (7.1) e (7.2) sopra. Notate che $(p \rightarrow q)$ e r sono le sottoformule immediate di A mentre p e $(q \wedge r)$ sono le sottoformule immediate di B . L’insieme delle sottoformule di A è

$$Sub(A) = \{((p \rightarrow q) \wedge r), (p \rightarrow q), p, q, r\}.$$

L’insieme delle sottoformule di B è

$$Sub(B) = \{(p \rightarrow (q \wedge r)), (q \wedge r), p, q, r\}.$$

È consuetudine riferirsi alle sottoformule immediate di una congiunzione, ad esempio $(A \wedge B)$, come ai suoi **congiunti**.

Analogamente, i **disgiunti** sono le sottoformule immediate di una disgiunzione. Le sottoformule di $(A \rightarrow B)$ sono normalmente chiamate **l’antecedente** (cioè A) e il **conseguente** (cioè B) dell’implicazione.

È spesso conveniente riferirsi al sottoinsieme più piccolo di \mathcal{L} che contiene le variabili proposizionali che compaiono in A come **il linguaggio di A** , che viene indicato con $\mathcal{L}(A)$.

Nell’esempio sopra A e B condividono il loro linguaggio, che è $\{p, q, r\}$, cioè

$$Sub(A) \cap Sub(B) = \{p, q, r\}.$$

Questo è il motivo per cui è comune dire che $\{p, q, r\}$ è *il linguaggio di A e B* .

7.2 La natura ricorsiva della sintassi proposizionale (★)

La **definizione ricorsiva** di \mathcal{FL} consiste, come ogni definizione ricorsiva, di tre clausole:

Caso base Vengono identificati gli elementi costitutivi dell'insieme da costruire. Nell'insieme \mathcal{FL} , il caso base consiste nello stabilire che tutte le variabili proposizionali sono formule, cioè che $\mathcal{L} = \mathcal{FL}_1$;

Passo ricorsivo Assumiamo che la costruzione che stiamo definendo abbia già raggiunto un certo numero di iterazioni n – da cui il nome “ricorsione”. Il passo ricorsivo definisce come raggiungere il passo $n + 1$. Nella costruzione di \mathcal{FL}_{n+1} ciò equivale a specificare le regole sintattiche per applicare i connettivi agli elementi di \mathcal{FL}_n .

Condizione di chiusura Stabiliamo che nient'altro apparterrà infine a \mathcal{FL} .

Notate l'uso dei pedici nella definizione informale di \mathcal{FL} . Quando un insieme è definito ricorsivamente, i suoi elementi sono usati per definire l'insieme stesso, ma non sorge alcuna circolarità perché a ogni passaggio usiamo un sottoinsieme ben preciso di \mathcal{FL} . Per chiarirlo ricordiamo, e per poter dare una definizione completamente rigorosa di \mathcal{FL} abbiamo bisogno di dare una formulazione elementare del **principio di induzione**.

7.2.1 Il principio di induzione

Per i nostri scopi attuali, saremo interessati al principio di induzione come metodo che usiamo per stabilire alcuni fatti rilevanti sui numeri naturali, o più in generale, su quegli insiemi i cui elementi possono essere messi in corrispondenza biunivoca con gli interi positivi (\mathbb{N}^+) (tali insiemi sono chiamati *numerabili* perché con abbastanza tempo e pazienza si possono contare tutti i loro elementi).

Per mantenere breve la nostra discussione, diamo per scontata la seguente affermazione dall'aspetto innocente:

Fatto: Buon ordinamento

Ogni sottoinsieme non vuoto di \mathbb{N} ha un elemento minimo (rispetto alla relazione d'ordine $<$.) ◀

Sia $A(n)$ l'abbreviazione di “ A è un'affermazione su n ”. Quindi, per esempio, $A(2)$ potrebbe essere l'abbreviazione di “2 è pari”, ecc.

Proposizione 1 (Principio di Induzione)

Se vale	$A(1)$ e	(a)
vale	$(A(k) \rightarrow A(k+1))$,	(b)
allora	$A(n)$ vale $\forall n \in \mathbb{N}$.	(c)

Dimostrazione.

Sia $F = \{x \in \mathbb{N} \mid A(x) \text{ non vale}\}$. L'equazione (c) è chiaramente equivalente a $F = \emptyset$.

DATO (a) e (b).

OBIETTIVO (c), cioè F è vuoto.

Supponiamo il contrario e deriviamo una contraddizione. Sia quindi

$$y \in F \neq \emptyset. \quad (7.3)$$

Senza perdita di generalità possiamo assumere che y sia il minimo tale che la condizione descritta da (7.3) sia vera. Il *Buon ordinamento* garantisce l'esistenza di un elemento minimo di F .

Possiamo ora osservare che (a) è sufficiente perché valga $y > 1$. Tuttavia, poiché y è minimo in F concludiamo che

$$y - 1 \notin F \quad (7.4)$$

cioè che $A(y-1)$ vale. Ma (b) implica $A(y-1+1)$, cioè che $A(y)$ vale, contraddicendo (7.3).

Quindi rifiutiamo l'ipotesi *ad absurdum* e concludiamo che $F = \emptyset$. ■

Pratica 7.2.1:

La rilevanza pratica della Proposizione 1 è garantire che le *dimostrazioni per induzione* costituiscano un metodo di dimostrazione valido ogni volta che le proprietà di interesse dipendono da una qualche enumerazione di numeri naturali, in particolare negli *insiemi definiti ricorsivamente*.

Gli insiemi di numeri naturali, pur essendo composti da un numero infinito di elementi, hanno una struttura relativamente semplice che ci permette di trarre conclusioni generali, valide cioè *per tutti i numeri*, a partire dall'osservazione di alcuni numeri particolari. L'esempio seguente chiarisce il punto.

Esempio:

Supponiamo di voler dimostrare che la somma dei primi n numeri naturali è uguale a $\frac{n(n+1)}{2}$.

Ricordiamo che i numeri naturali sono quelli interi e positivi (quindi niente frazioni e niente virgole). Convenzionalmente stiamo assumendo che il più piccolo numero naturale sia 1.

Sappiamo poi che i numeri naturali sono infiniti. Non è infatti possibile indicare il numero più grande di tutti. Se provassimo a indicare questo numerone, avremmo anche il modo di superarlo semplicemente aggiungendo 1. Se ci immaginiamo i numeri naturali scritti in una sequenza ordinata, dal più piccolo al più grande, sappiamo di non poterne vedere la fine.

Come si fa allora a dimostrare che

$$1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (7.5)$$

dove i tre puntini sono un'abbreviazione per "tutti gli altri numeri maggiori di 1 e minori di n "? Lo dimostriamo per *induzione su n* .

Intanto cominciamo con il numero più piccolo di tutti, 1. Sostituiamo cioè nell'equazione (7.5) 1 a n . Otteniamo chiaramente $1 = 1$, che indubbiamente è vero.

A questo punto dobbiamo *dimostrare* che la proprietà che ci interessa, quella catturata dall'equazione (7.5) viene *preservata* a ogni aggiunta di unità. Per fare questo formuliamo l'**ipotesi induttiva** del nostro problema:

Se k è un numero naturale maggiore di 1 che soddisfa l'equazione 7.5, allora anche $k + 1$ soddisfa la condizione richiesta.

L'ipotesi induttiva è formulata come un'**implicazione**, se \dots , allora, e per dimostrare che è vera assumiamo il suo antecedente. Assumiamo quindi di avere un k che soddisfa la nostra equazione. Dobbiamo dimostrare che la condizione è soddisfatta anche per $k + 1$ e cioè che

$$1 + \dots + k + (k + 1) = \frac{(k + 1)((k + 1) + 1)}{2}$$

Non abbiamo fatto alcuna ipotesi su k , se non che fosse maggiore di 1. Quindi possiamo dire di aver dimostrato la proprietà che ci interessa per un k qualsiasi, ovvero per *tutti* i numeri naturali. ◀

Notate che la Proposizione 1 ha $A(1)$ come prima condizione, piuttosto che $A(0)$. Assumere che i numeri inizino con 1 rende esplicito che stiamo enumerando gli elementi di un insieme. Questo suggerisce che si applica naturalmente a quegli oggetti matematici che sono costruiti in modo “graduale”, cioè secondo regole discrete e ben specificate. Se questo vi ricorda il concetto di *algoritmo* avete perfettamente ragione: un modo per esplicitare la definizione matematica di una procedura algoritmica è proprio quello di identificarla con una particolare classe di funzioni ricorsive.

7.3 Una definizione formale dell'insieme \mathcal{FL} (★)

Torniamo allora all'insieme delle formule proposizionali, di cui siamo finalmente pronti a dare una vera e propria definizione.

Definizione 7.3.1 (L'insieme delle formule di \mathcal{L})

Fissato \mathcal{L} . L'insieme delle formule di \mathcal{L} , denotato da \mathcal{FL} , è definito ricorsivamente come segue:

$$\begin{aligned}\mathcal{FL}_1 &= \mathcal{L} \\ \mathcal{FL}_{n+1} &= \mathcal{FL}_n \cup \{(\neg A), (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B) \mid A, B \in \mathcal{FL}_n\}, \\ \mathcal{FL} &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{FL}_n.\end{aligned}$$

Non dovrete, a questo punto, avere grosse difficoltà a interpretare informalmente la definizione. La prima clausola è quella base. La seconda cattura il passo ricorsivo, specificando che il “successore” nella costruzione dell'insieme \mathcal{FL} può avere quattro aspetti, quelli dei connettivi. Infine, l'ultima clausola ci dice che l'insieme è infinito: si ottiene ripetendo il passo ricorsivo tante volte quanti sono i numeri naturali.

La caratteristica della Definizione 7.3.1 è quella di fornirci il *meccanismo di costruzione* di formule complesse a partire da quelle più semplici come descritto nella Figura 7.1.

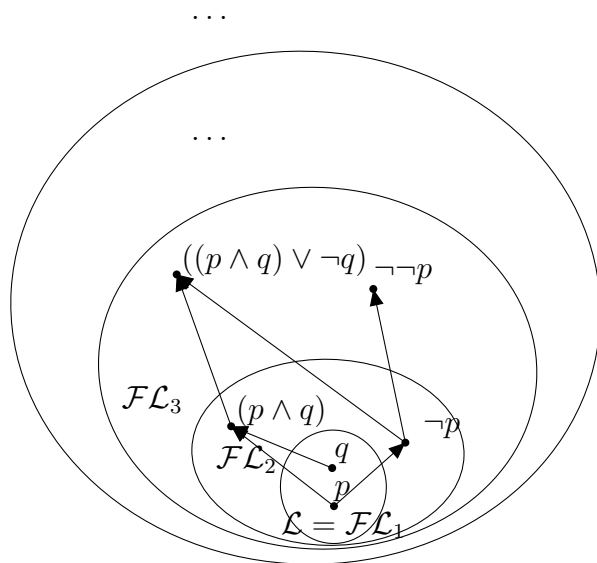


Figura 7.1: Un'illustrazione di come potrebbe apparire l'insieme \mathcal{FL} dove $\mathcal{L} = \{p, q\}$.

Ci sono due modi per muoversi dal cerchio interno verso l'esterno. Possiamo prendere $p \in \mathcal{FL}_1$ e anteporgli la negazione, dando origine a $(\neg p)$ che quindi appartiene a \mathcal{FL}_2 . Altrimenti potremmo prendere *due* variabili in \mathcal{L} , diciamo p, q e applicare loro uno qualsiasi dei connettivi binari per arrivare a un elemento di \mathcal{FL}_2 , diciamo $(p \wedge q)$.

Esempio:

Siano $p, q \in \mathcal{L}$ e supponiamo che p abbrevi "Alain Delon ha rifiutato di recitare" mentre q abbrevi "Marcello Mastroianni ha recitato in *Il Bell'Antonio*". Possiamo formalizzare

Se Alain Delon non avesse rifiutato, Mastroianni non avrebbe recitato in *Il Bell'Antonio*

con

$$A = (\neg p \rightarrow \neg q),$$

dove $A \in \mathcal{FL}_2$. ◀

Facciamo ora vedere come applicare il **principio di induzione** (si veda pag. 144) all'insieme delle formule \mathcal{FL} (Definizione 7.3.1).

Teorema 7.3.1 (Finitudine delle variabili proposizionali)

Ogni formula $\varphi \in \mathcal{FL}$ contiene un numero finito di variabili proposizionali.

Dimostrazione. Dimostriamo l'enunciato per induzione sulla costruzione delle formule di \mathcal{FL} .

Sia $\text{Var}(\varphi)$ l'insieme delle variabili proposizionali che compaiono nella formula φ .

Caso base: Se $\varphi = p$, i.e. $\varphi \in \mathcal{FL}_1$, e p è una variabile proposizionale, allora

$\text{Var}(p) = \{p\}$, che è un insieme finito.

Passo induttivo: Supponiamo che $\text{Var}(\psi)$ e $\text{Var}(\chi)$ siano insiemi finiti.

- Se la formula φ è della forma $\varphi = \neg\psi$, allora

$$\text{Var}(\varphi) = \text{Var}(\neg\psi) = \text{Var}(\psi),$$

che è finito per ipotesi induttiva.

- Se la formula φ è della forma $\varphi = \psi * \chi$, con $*$ $\in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, allora

$$\text{Var}(\varphi) = \text{Var}(\psi * \chi) = \text{Var}(\psi) \cup \text{Var}(\chi).$$

Poiché l'unione di insiemi finiti è finita, anche $\text{Var}(\varphi)$ è un insieme finito.

In tutti i casi, abbiamo fatto vedere che $\text{Var}(\varphi)$ è un insieme finito. ■

Abbiamo visto che l'insieme delle formule \mathcal{FL} è costruito per strati a partire dall'insieme delle variabili proposizionali \mathcal{L} (si faccia riferimento alla Figura 7.1). Di conseguenza, per ogni formula $\varphi \in \mathcal{FL}$, a meno che φ non sia una variabile proposizionale, questa è ottenuta applicando un connettivo a una (nel caso di \neg) o due formule costruite in uno strato più interno (nel caso di \wedge, \vee e \rightarrow). Tale connettivo è detto **connettivo principale**. Dimostriamo ora per induzione il seguente teorema.

Teorema 7.3.2 (Unicità del Connettivo Principale)

Ogni formula $\varphi \in \mathcal{FL} \setminus \mathcal{L}$ (φ non è una variabile proposizionale) ha un unico connettivo principale.

Dimostrazione. Dimostriamo l'enunciato per induzione sulla costruzione delle formule in \mathcal{FL} .

Caso base: Se φ è una variabile proposizionale, allora φ non ha alcun connettivo principale. Quindi l'implicazione “se $\varphi \in \mathcal{FL} \setminus \mathcal{L}$, allora φ ha un unico connettivo principale” è soddisfatta vacuamente.

Passo induttivo: Supponiamo che $\psi, \chi \in \mathcal{FL}$ siano formule.

- Se $\varphi = \neg\psi$, allora \neg è il connettivo principale di φ . Per la definizione 7.3.1, una formula della forma $\neg\psi$ non può essere anche della forma $\alpha * \beta$, quindi il connettivo principale è unico.
- Se $\varphi = \psi * \chi$, con $*$ $\in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, allora $*$ è il connettivo principale di φ . Per la definizione 7.3.1, φ non può essere della forma $\neg\gamma$, né della forma $\psi \circ \chi$ con $\circ \in \{\vee, \wedge, \rightarrow\} \setminus \{*\}$, quindi il connettivo principale è unico.

In conclusione, ogni formula di \mathcal{FL} che non è una variabile proposizionale ha un connettivo principale ben determinato, e tale connettivo è unico. ■

7.3.1 Scomposizione univoca

Il seguente risultato, di importanza pratica difficile da sovrastimare, illustra i vantaggi di avere a che fare con un insieme di formule definito ricorsivamente: *non può mai esserci alcuna forma di ambiguità nelle nostre espressioni logiche.*

Teorema 7.3.3 (Scomposizione univoca)

Siano $A, B_1, B_2 \in \mathcal{FL}$. Vale esattamente una delle seguenti:

$$\begin{aligned} A &= p \in \mathcal{L}; \\ A &= (\neg B_1); \\ A &= (B_1 \wedge B_2); \\ A &= (B_1 \vee B_2); \\ A &= (B_1 \rightarrow B_2); \end{aligned}$$

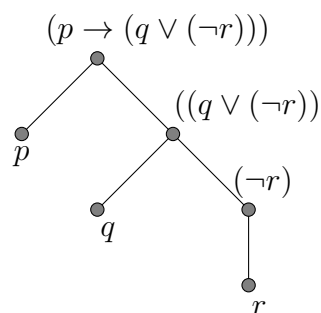
dove B_1, B_2 sono sotto-formule immediate di A (cioè se $B_1, B_2 \in \mathcal{FL}_n$ allora $A \in \mathcal{FL}_{n+1}$).

Possiamo rendere visivamente cospicua la leggibilità univoca delle formule di \mathcal{L} attraverso la definizione ricorsiva di **alberi sintattici**.

La caratteristica saliente degli alberi sintattici è che preso un qualsiasi $A \in \mathcal{FL}$ esiste uno e un solo albero $T(A)$ che lo scomponga.

Esempio:

Sia $A = (p \rightarrow (q \vee (\neg r)))$. $T(A)$ viene costruito come segue:



Quindi, la costruzione dell'albero sintattico inizia etichettando la radice con l'enunciato di interesse, e poi procede ramificando a partire dal connettivo principale, in questo caso "→". Mettiamo nel ramo di sinistra la sottoformula che si trova alla sinistra del connettivo principale, e a destra la sottoformula corrispondente: in questo caso p e $(q \vee \neg r)$.

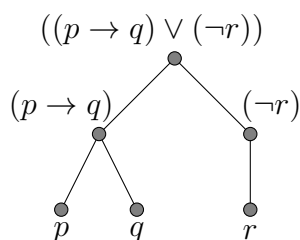
Per il passo successivo non è disponibile alcuna ulteriore ramificazione a sinistra, mentre \vee è il connettivo principale della sottoformula del ramo destro. Si scompone

quello, ramificando come prima. E così via finché non è possibile alcuna ulteriore ramificazione.

Notate che l'insieme delle variabili proposizionali che compaiono come etichette dei nodi terminali di $T(A)$ coincide con il linguaggio di A .

Esempio:

Sia $B = ((p \rightarrow q) \vee (\neg r))$. $T(B)$ viene costruito come segue:



Notate che A e B sono molto simili, nel senso che hanno lo stesso linguaggio proposizionale e hanno gli stessi connettivi nello stesso ordine. Cambia però il connettivo principale, cioè il modo in cui abbiamo messo le parentesi. Questo rende sintatticamente distinti A e B , come mostrano chiaramente i due alberi.

Questo mostra un punto centrale: una formula proposizionale è descritta in modo massimamente specifico e senza ambiguità. Basta cambiare un simbolo per dar luogo a una formula diversa.

7.3.2 Convenzioni per eliminare le parentesi

A meno di non dover risolvere un problema *di* sintassi, tipicamente si adottano alcune convenzioni per ridurre il numero di parentesi nelle formule:

1. Omettere le parentesi quando si introducono negazioni di singole formule e cioè scrivere $\neg A$ e $\neg\neg A$ ecc. invece di $(\neg A)$ e $(\neg(\neg A))$, ecc.
2. Rimuovere le parentesi più esterne, cioè invece di scrivere $(\neg p \rightarrow \neg q)$, scriviamo $\neg p \rightarrow \neg q$, ecc.
3. Se una formula contiene un solo connettivo binario, rimuovere tutte le parentesi associando a sinistra. Invece di scrivere $((A \wedge B) \wedge C)$ scriviamo $A \wedge B \wedge C$.
4. Dare priorità ai connettivi come segue:

connettivo	priorità
\neg	1
\wedge	2
\vee	3
\rightarrow	4

In pratica le convenzioni 1 e 2 sono sempre utilizzate; la convenzione 3 è usata talvolta, e la convenzione 4 è spesso usata solo per uno o due connettivi. È infatti molto più semplice usare le parentesi rispetto a calcolare la priorità dei connettivi.

Così, scriviamo

$$\neg A \vee B$$

invece di

$$(\neg(A) \vee B),$$

proprio come scriviamo

$$\neg A \rightarrow (C \vee B)$$

invece di

$$((\neg A) \rightarrow ((C \vee B))).$$

Notate l'analogia con quello che succede in aritmetica. Lì non si dà alcuna ambiguità quando si incontra un'espressione come $x + y \cdot z$, che è una forma abbreviata di $x + (y \cdot z)$.

7.4 Esercizi

Esercizio 12

Assicuratevi di aver compreso la notazione nelle seguenti affermazioni su \mathcal{FL} :

- a) $p, q \in \mathcal{L} \subseteq \mathcal{FL}$
- b) $A, B \in \mathcal{FL}$
- c) $\Gamma = \{A, B\} \subseteq \mathcal{FL}$

Esercizio 13

Quali delle seguenti sono formule? Giustificare le risposte:

1. $(p \vee (q \rightarrow p))$
2. $((\neg(p) \wedge (q \rightarrow (q \rightarrow p))) \vee (\neg(p \vee q)))$
3. $(A \wedge B \wedge C)$

Esercizio 14

Questo esercizio serve esclusivamente a verificare che abbiate compreso le convenzioni notazionali rilevanti.

1. Spiegare le due relazioni insiemistiche che compaiono in " $p, q \in \mathcal{L} \subseteq \mathcal{FL}$ ".
2. Può accadere che $A, B \in \mathcal{FL}$?

Esercizio 15

Dimostrare che se $A \in \mathcal{FL}$ contiene due connettivi principali, allora essi coincidono.

Esercizio 16

Costruire l'albero sintattico di $(\neg(\neg p \wedge (\neg p)))$.

Esercizio 17

Dimostrare che le formule $A = (p \wedge q)$ e $B = (q \wedge p)$ sono distinte.

Esercizio 18

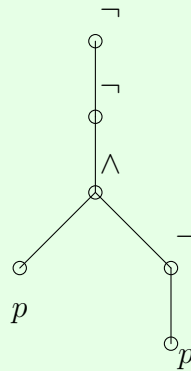
Trova l'insieme delle sottoformule immediate di

$$A = (((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \vee (\neg p)).$$

Descrivere $Sub(A)$.

Esercizio 19

Sia $T(A)$ come descritto in figura. Trovare $Sub(A)$.



Esercizio 20

La risposta ai due esercizi precedenti è **unica**? Giustificare la risposta in ciascun caso.

Esercizio 21

Sia $\mathcal{L} = \{p, r\}$. Per ciascuna delle seguenti stringhe decidere quali sono gli elementi di $\mathcal{F}\mathcal{L}$. Giustificare la risposta.

1. p
2. $p \wedge q$
3. $(p \wedge p)$

8 Semantica: Il significato dei connettivi proposizionali

A metà dell'Ottocento, George Boole e Augustus De Morgan hanno rivoluzionato il modo di fare logica mettendo al centro il metodo matematico. L'idea affonda le radici nel metodo algebrico ideato da Al Khwaritzmi, in onore del quale usiamo il termine *algoritmo*.

L'idea centrale è che il valore di verità di una formula qualsiasi dipende **unicamente** dal valore di verità delle sue sottoformule immediate.

\vee		0	1
0		0	1
1		1	1

\oplus^1		0	1
0		0	1
1		1	1

max		0	1
0		0	1
1		1	1

\wedge		0	1
0		0	0
1		0	1

\cdot		0	1
0		0	0
1		0	1

min		0	1
0		0	0
1		0	1

\neg			
0		1	
1		0	

1-			
0		1	
1		0	

- 8.1 Dalla sintassi alla semantica 156
- 8.2 Il significato matematico dei connettivi 157
- 8.3 Composizionalità 163
- 8.4 Connettivi e operazioni aritmetiche 165
- 8.5 Connettivi e operazioni insiemistiche 169
- 8.6 Proprietà dei connettivi . . 173
- 8.7 Completezza funzionale . 179
- 8.8 Esercizi 187

8.1 Dalla sintassi alla semantica

Nella Definizione 7.3.1 i connettivi \neg , \wedge , \vee , \rightarrow hanno unicamente il ruolo di simboli utili a costruire formule via via sempre più complicate. Per questo vi abbiamo suggerito nella Sezione 7.1 di resistere alla tentazione di attribuire ai connettivi una qualche intuizione linguistica.

Questo, ovviamente, stride con quello che abbiamo fatto nella Parte I e soprattutto nel Capitolo 2 dove i quesiti vi chiedono di ragionare su (quelle che lì chiamiamo) proposizioni composte. Vi abbiamo guidato nelle soluzioni di quei quesiti attraverso direttive sulla manipolazione appropriata dei connettivi che vi abbiamo impartito senza particolari spiegazioni. È arrivato il momento di approfondire e, soprattutto, di giustificare quelle direttive.

Prima di cominciare, è utile osservare che il significato di un concetto logico (e, più in generale, scientifico) non è quasi mai dato in modo assoluto. Se proseguirete nello studio della logica oltre questo volume, scoprirete infatti che esistono molti tipi di logiche, ciascuna motivata dall'ambizione di catturare alcuni aspetti del ragionamento umano, e non solo. Dunque, per giustificare l'appropriatezza di una definizione o di una metodologia logica, è necessario specificare il contesto applicativo della logica che stiamo studiando.

Il contesto di ragionamento in cui i metodi e le nozioni che abbiamo messo in pratica nella Parte I risultano adeguate è quello **matematico** e più precisamente, della **deduzione matematica**. Potreste osservare a questo punto che non si tratta del contesto tipico dei quesiti del Capitolo 2 che parlano più di bambini che di triangoli. Torneremo sul rapporto sottile tra logica proposizionale e ragionamento quotidiano nel Capitolo 10.

Riprendiamo allora i connettivi ricapitolandone il significato attraverso le **matrici Booleane** descritte dalla Tabella 8.1. Procederemo poi ad analizzarli e soprattutto a giustificarne la definizione.

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1

Tabella 8.1: Ricordate che nella lettura delle matrici Booleane interpretiamo 0 come *falso* e 1 come *vero*.

Terminologia e Notazione: Matrici Booleane

Nella Parte I ci siamo conformati all'uso diffuso dell'espressione *tavola di verità*. Poiché in quella parte del manuale il nostro obiettivo è aiutarvi a capire e risolvere i problemi che probabilmente trovate nei test di ammissione, abbiamo deciso di conformarci a quell'uso. Tuttavia l'espressione *matrici Booleane* è preferibile sotto molti punti di vista, tra cui, in primo luogo, quello di dare visibilmente credito all'idea rivoluzionaria di George Boole di trattare l'inferenza logica con strumenti matematici. Inoltre la variazione terminologica ci permette di guardare lo stesso oggetto da un angolo metodologicamente più profondo. ◀

In questa sezione lavoreremo con il linguaggio proposizionale $\mathcal{L} = p, q$. Per ciascun connettivo che compare nella Definizione 7.3.1, forniremo una giustificazione matematica della relativa definizione. Nel caso della negazione e della congiunzione non sarà necessario aggiungere molto. Per la disgiunzione e per l'implicazione, invece, sarà necessario sviluppare la giustificazione con maggiore dettaglio.

8.2 Il significato matematico dei connettivi

Iniziamo definendo l'elemento fondamentale della semantica, l'insieme delle **valutazioni proposizionali**.

Definizione 8.2.1 (Valutazioni proposizionali)

Dato un linguaggio proposizionale \mathcal{L} , l'insieme \mathbb{V} delle **valutazioni proposizionali** è definito come l'insieme di tutte le funzioni da \mathcal{L} all'insieme binario $\{0, 1\}$:

$$\mathbb{V} = \{v \mid v : \mathcal{L} \rightarrow \{0, 1\}\}.$$

Esempio:

Sia $\mathcal{L} = \{p, q\}$. Allora, $\mathbb{V} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ può essere definito come

$$v_1(p) = 0; v_1(q) = 0,$$

$$v_2(p) = 0; v_2(q) = 1,$$

$$v_3(p) = 1; v_3(q) = 0,$$

$$v_4(p) = 1; v_4(q) = 1.$$

Se ci concentriamo soltanto sugli 0 e gli 1, si nota che questo è precisamente ciò che le matrici Booleane tabulano nel "lato sinistro" della Tabella 8.1, cioè

$$\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}$$

La ragione di ciò dovrebbe già essere chiara: interpretiamo ciascuna valutazione come una distribuzione completa di valori di verità alle variabili proposizionali. Abbiamo sfruttato abbondantemente il significato pratico di questa osservazione nella Parte I dove interpretiamo le valutazioni come *situazioni* (possibili).

Approfondimento:

Più in generale, le righe di una matrice booleana sono in corrispondenza biunivoca con l'insieme \mathbb{V} . Per vedere perché (informalmente), si prenda $\mathcal{L} = \{p_1, \dots, p_n\}$ e si fissi p_i . Allora si hanno due opzioni per $v(p_i)$. Poiché ciò vale per tutti gli indici $i = 1, \dots, n$, un semplice conteggio mostra che ci sono 2^n scelte distinte di tali valori, che è proprio il numero di righe in una matrice booleana per una frase A il cui linguaggio ha cardinalità n . ◀

8.2.1 Negazione

La prima volta che abbiamo ragionato a proposito della *negazione* nella Parte I, abbiamo osservato un fatto tutto sommato abbastanza banale introducendo **Le condizioni di verità della negazione Booleana** (si veda pag. 28), la negazione di una proposizione vera è falsa, e la negazione di una proposizione falsa è vera.

Definizione 8.2.2 (Negazione)

	p	$\neg p$
v_1	1	0
v_2	0	1

Supponiamo che p abbrevi la proposizione “ n è pari”, allora sarà falso asserire $\neg p$, e cioè “ n non è pari”. In ambito matematico la negazione, tra tutti i connettivi, è probabilmente quella che richiede meno discussione. Come vedremo nella Sezione 10.2.1, le cose si complicano quando ragioniamo fuori dal contesto matematico.

8.2.2 Congiunzione

Ricorderete che nella soluzione del Quesito 2.1.2 abbiamo introdotto **Le condizioni di verità della congiunzione Booleana** (si veda pag. 24), la congiunzione è vera esattamente quando entrambi i congiunti sono veri.

Definizione 8.2.3 (Congiunzione)

	p	q	$p \wedge q$
v_1	1	1	1
v_2	1	0	0
v_3	0	1	0
v_4	0	0	0

Supponiamo che p abbrevi la proposizione “ n è primo” e q abbrevi “ n è maggiore di 2”. La definizione di \wedge ci dice che “ n è un primo maggiore di 2” esattamente se n è primo ed è anche maggiore di 2. Come anticipato, non c’è niente di sorprendente nella Definizione 8.2.3. Tuttavia vedremo nella Sezione 10.2.2 che fuori dall’ambito della deduzione matematica il connettivo \wedge e la congiunzione “e” non hanno molto in comune.

8.2.3 Implicazione**Definizione 8.2.4 (Implicazione)**

	p	q	$p \rightarrow q$
v_1	1	1	1
v_2	1	0	0
v_3	0	1	1
v_4	0	0	1

Notate innanzitutto una differenza importante con la definizione della congiunzione, con cui l’implicazione condivide v_1 e v_2 (ben due valutazioni su quattro). Poiché v_2 e v_3 hanno valori distinti, dobbiamo dare un nome distinto a p e q che chiamiamo rispettivamente l’**antecedente** e il **conseguente** dell’implicazione della Definizione 8.2.4.

Dunque, in linea con le **Condizioni di verità dell’implicazione Booleana** (si veda pag. 21) la Definizione 8.2.4 cattura un fatto di grande importanza in logica: valutiamo un’implicazione in 1 esattamente quando il valore di verità del conseguente è maggiore o uguale al valore di verità dell’antecedente. Detto altrimenti: **un’implicazione vera non permette perdita di valore di verità tra antecedente e conseguente**. Come avete già avuto modo di osservare con l’analisi di **Segue da (conseguenza logica)** (si veda pag. 27), questo è lo stesso principio che informa il concetto di **deduzione matematica** e nella sua astrazione della **deduzione matematica** su cui torneremo nel Capitolo 9.

Passiamo ora a giustificare la Definizione 8.2.4. Per farlo partiamo da un’asserzione

vera in aritmetica elementare:

Se n è un numero primo maggiore di 2, allora n è dispari. (n)

Notate innanzitutto che l'asserzione (n) ha la forma di un'implicazione di cui identifichiamo con p l'antecedente (n è un numero primo maggiore di 2) e con q il conseguente (n è dispari). L'obiettivo è di operare opportune sostituzioni al posto della variabile n per giustificare i valori assunti dalle valutazioni v_1 , v_3 , e v_4 . Ovviamente, non opereremo alcuna sostituzione per v_2 , visto che quella valutazione rende l'implicazione falsa – situazione incompatibile con il fatto che la (n) è vera di *tutti i numeri*.

Ma proprio in virtù del fatto che l'asserzione (n) vale per tutti i numeri, possiamo sostituire a n qualunque valore intero. Cominciamo con

se 3 è un numero primo maggiore di 2, allora 3 è dispari. ($n = 3$)

Se accettate (come dovrete) che (n) è vera, allora dovete accettarne anche questa istanza, che deriva sostituendo n con 3: se (n) è vera di tutti i numeri è vera anche di 3. Con questa sostituzione potete giustificare v_1 (l'implicazione è vera ed entrambi tra antecedente e conseguente sono veri). Si tratta del caso meno problematico della Definizione 8.2.4, che come avrete senz'altro notato non distingue tra implicazione e congiunzione.

Più interessanti sono i casi v_3 e v_4 . Nel primo abbiamo l'implicazione vera con antecedente falso e conseguente vero. Si tratta della situazione che emerge sostituendo n nell'asserzione (n) con (per esempio) 9:

se 9 è un numero primo maggiore di 2, allora 9 è dispari. ($n = 9$)

L'asserzione ($n = 9$) è vera: l'istanza ha antecedente falso (9 non è primo) ma conseguente vero (9 è dispari), dunque l'implicazione risulta valutata 1.

Per quanto riguarda v_4 , l'implicazione è vera, pur avendo antecedente e conseguente falsi. Si tratta della situazione che si ottiene sostituendo, nell'asserzione (n), n con, per esempio, 6:

se 6 è un numero primo maggiore di 2, allora 6 è dispari. ($n = 6$)

Anche l'asserzione ($n = 6$) è vera, poiché sia l'antecedente (6 è primo maggiore di 2) sia il conseguente (6 è dispari) sono falsi.

Infine, ritorniamo brevemente su v_2 nella Definizione 8.2.4. Questa valutazione cattura l'aspetto meno controverso del connettivo " \rightarrow ": un'implicazione non deve essere accettata come vera quando il conseguente è **meno vero** dell'antecedente. Quando ciò succede, si dice che la valutazione fornisce un **controesempio** all'implicazione.

Riassumendo: se avete perplessità sul fatto che un'implicazione con antecedente falso sia vera, l'esempio appena discusso vi dice che cambiare il valore di v_3 e v_4 significa rendere *falsa* una proprietà molto elementare dei numeri interi come la (n).

Pratica 8.2.1:

Se la perplessità persiste, ragionate in questo modo. La Definizione 8.2.4 rende matematicamente rigoroso il concetto che informa le **Condizioni di verità dell'implicazione Booleana** (si veda pag. 21) e in pratica ci dice che un'implicazione è vera esattamente quando è falsa la congiunzione dell'antecedente con la negazione del conseguente. Così facendo abbiamo appena *definito* l'implicazione in termini della congiunzione e della negazione, entrambi connettivi non problematici nel contesto matematico.

8.2.4 Disgiunzione

Definizione 8.2.5 (Disgiunzione)

	p	q	$p \vee q$
v_1	1	1	1
v_2	1	0	1
v_3	0	1	1
v_4	0	0	0

Anche se in misura minore rispetto all'implicazione, anche la definizione della disgiunzione crea spesso fraintendimenti relativamente a v_1 perché nel linguaggio comune la disgiunzione esprime prevalentemente alternative incompatibili.

Argomentiamo dunque in modo analogo a quanto fatto per la definizione di implicazione.

In teoria elementare dei numeri si dimostra facilmente (e a volte si usa assiomaticamente) che per tutti gli interi a e b :

$$ab = 0 \text{ se e solo se } a = 0 \text{ oppure } b = 0. \quad (8.1)$$

Esaminiamo (con una certa utile ridondanza) come possiamo procedere per stabilire (8.1).

Notiamo anzitutto che si tratta di un'equivalenza (se e solo se), il che suggerisce naturalmente di separare le due direzioni dell'implicazione:

1. Se $ab = 0$, allora $a = 0$ oppure $b = 0$.
2. Se $a = 0$ oppure $b = 0$, allora $ab = 0$.

La natura degli interi ci permette di rappresentare tutti i casi possibili nella Tabella 8.2. La direzione da sinistra a destra (1.) si ottiene osservando che, nella colonna con intestazione $a = 0$, compare sempre $ab = 0$, e lo stesso vale per la riga con intestazione $b = 0$.

	$a < 0$	$a = 0$	$a > 0$
$b < 0$	$ab > 0$	$ab = 0$	$ab < 0$
$b = 0$	$ab = 0$	$ab = 0$	$ab = 0$
$b > 0$	$ab < 0$	$ab = 0$	$ab > 0$

Tabella 8.2: I nove casi rilevanti che emergono moltiplicando due interi a e b .

L'ispezione della Tabella 8.2 consente anche di verificare la direzione da destra a sinistra (2.): infatti, ogni volta che vale $ab = 0$, vale anche almeno una fra $a = 0$ e $b = 0$, come richiesto.

Concludiamo che se volessimo insistere sull'interpretazione *esclusiva* della disgiunzione, quella cioè che rende falsa la disgiunzione quando entrambi i disgiunti sono veri, perderemmo una delle proprietà definitorie del comportamento della moltiplicazione ordinaria.

8.3 Composizionalità

Mettiamo ora insieme sintassi e semantica. Sfruttando la natura ricorsiva dell'insieme \mathcal{FL} discussa nel Capitolo 7, dimostriamo una proprietà centrale della logica Booleana: il valore di verità di una formula qualunque $A \in \mathcal{FL}$ è **determinato univocamente** dai valori di verità delle sue sottoformule immediate. Poiché per costruzione di \mathcal{FL} sappiamo che le sottoformule “ultime” di A sono le sue variabili proposizionali, il principio di composizionalità ci dice che il valore di verità di A è determinato univocamente dal valore di verità delle variabili proposizionali che lo compongono.

Teorema 8.3.1 (Composizionalità della semantica proposizionale)

Siano $A, B \in \mathcal{FL}$. Ogni valutazione $v : \mathcal{L} \rightarrow 0, 1$ si estende in modo univoco a \mathcal{FL} secondo le condizioni:

$$\begin{aligned} v(\neg A) = 1 & \text{ se e solo se } v(A) = 0; \\ v(A \wedge B) = 1 & \text{ se e solo se } v(A) = v(B) = 1; \\ v(A \vee B) = 0 & \text{ se e solo se } v(A) = v(B) = 0; \\ v(A \rightarrow B) = 0 & \text{ se e solo se } v(A) = 1 \text{ e } v(B) = 0. \end{aligned}$$

La prima condizione stabilisce che perché $\neg A$ sia valutata 1 (in breve: “sia vera”), è necessario e sufficiente che A sia valutata 0. Analogamente, una congiunzione è vera se e solo se entrambe le sue sottoformule immediate sono vere. Dualmente, una disgiunzione è falsa in un solo caso: quando *entrambe* le sottoformule immediate sono valutate in 0. Infine, un'implicazione è valutata 0 in un solo caso, quando l'antecedente è valutato 1 e il conseguente 0.

Si tratta, noterete, delle condizioni imposte dalle definizioni dei connettivi, con una differenza sottile ma importante. A differenza della Tabella 8.1, non stiamo parlando di variabili proposizionali, ma di formule arbitrariamente complicate. Non importa se contengono centinaia di variabili proposizionali, la **Composizionalità della semantica proposizionale** (si veda pag. 163) ci dice che per conoscere il valore di verità di A è *sufficiente* conoscere il valore di verità delle sue sottoformule immediate.

Dimostrazione.

La **Composizionalità della semantica proposizionale** si dimostra *per induzione sulla costruzione di \mathcal{FL}* .

Il *caso base* è immediato: si tratta di verificare che il risultato vale per $\mathcal{FL}_1 = \mathcal{L}$, e questo non richiede alcun controllo — basta richiamare le matrici Booleane descritte alla Tabella 8.1.

Definiamo ora un'utile *ipotesi induttiva*:

Dato (IH) Il risultato vale per \mathcal{FL}_n .

Vogliamo Il risultato vale per \mathcal{FL}_{n+1} .

Sia dunque $A \in \mathcal{FL}_{n+1}$. Per definizione:

$$\mathcal{FL}_{n+1} = \mathcal{FL}_n \cup \{\neg A, (A * B) \mid A, B \in \mathcal{FL}_n, * \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}\}.$$

Se $A \in \mathcal{FL}_n$, possiamo invocare l'ipotesi induttiva, che garantisce che $v(A)$ è ben definito.

Se invece $A \notin \mathcal{FL}_n$, allora $A \in \mathcal{FL}_{n+1} \setminus \mathcal{FL}_n$ e, per unicità della leggibilità (Unique Readability), dobbiamo considerare esattamente quattro casi. In ciascuno di essi costruiamo una valutazione univocamente determinata dall'IH, poiché coinvolge elementi di \mathcal{FL}_n .

1. Caso $A = \neg B_1$. Poniamo:

$$v(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } v(B_1) = 0, \\ 0 & \text{se } v(B_1) = 1. \end{cases}$$

2. Caso $A = A_1 \wedge A_2$. Poniamo:

$$v(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } v(A_1) = v(A_2) = 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

3. Caso $A = A_1 \vee A_2$. Poniamo:

$$v(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } v(A_1) = v(A_2) = 0, \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

4. Caso $A = A_1 \rightarrow A_2$. Poniamo:

$$v(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } v(A_1) = 1 \text{ e } v(A_2) = 0, \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Poiché per il Teorema 7.3.3 non si danno altri casi, la condizione di chiusura del **Principio di Induzione** (si veda pag. 144) conclude la dimostrazione. ■

Terminologia e Notazione: Matrici Booleane estese

Siano $A, B, C \in \mathcal{FL}$. Non disponiamo di alcuna ulteriore informazione su \mathcal{L} . Consideriamo la formula

$$D = (A \rightarrow (B \wedge C)).$$

La **Composizionalità della semantica proposizionale** (si veda pag. 163) ci permette di costruire una matrice booleana per D assumendo che essa sia scritta nel linguaggio $\mathcal{L}' = \{p, q, r\}$, dove p rappresenta A , q rappresenta B e r rappresenta C . Naturalmente, non c'è nulla di speciale in questa identificazione. (L'importante è che A sia distinto da q e così per tutte le altre formule.) In effetti, ciò che stiamo facendo è rinominare le variabili: trattiamo ogni sottoformula di D come se fosse una “nuova” variabile proposizionale.

Possiamo quindi costruire la matrice booleana di D rispetto a \mathcal{L}' (anziché rispetto all'originario e ignoto linguaggio \mathcal{L}), nel modo consueto:

	p	q	r	$(p \rightarrow (q \wedge r))$
v_1	1	1	1	1
v_2	1	1	0	0
v_3	1	0	1	0
v_4	1	0	0	0
v_5	0	1	1	1
v_6	0	1	0	1
v_7	0	0	1	1
v_8	0	0	0	1

Permettendoci la costruzione di matrici Booleane estese il Teorema 8.3.1 ci permette di spiegare uno dei sensi in cui si dice che la *logica è formale*: il linguaggio in cui D è espressa non ha infatti alcuna importanza. Tutto ciò che conta è il valore che D assume come *funzione* dei valori di verità delle sue sottoformule immediate.

8.4 Connettivi e operazioni aritmetiche

L'intuizione che ha portato George Boole a inventare la logica matematica, aprendo le porte alla rivoluzione digitale del ventesimo secolo, consiste nel considerare il significato dei connettivi proposizionali come operazioni aritmetiche (o più generalmente analitiche).

8.4.1 Negazione

Proposizione 2 (Negazione e sottrazione)

Sull'insieme $\{0, 1\}$ la negazione Booleana \neg è espressa dalla sottrazione. In particolare, per ogni formula A in \mathcal{FL} vale

$$v(\neg A) = 1 - v(A).$$

Dimostrazione.

Per il Teorema 8.3.1 è sufficiente dimostrare la proposizione per la seguente matrice estesa:

	p	$\neg p$
v_1	1	0
v_2	0	1

in cui stipuliamo $A = p$. Osserviamo che nelle due righe vale ciò che vogliamo: $1 - 1 = 0$ e $1 - 0 = 1$. ■

8.4.2 Congiunzione

Proposizione 3 (Congiunzione e prodotto)

Sull'insieme $\{0, 1\}$ la congiunzione booleana \wedge coincide con la moltiplicazione ordinaria.

In particolare, per ogni coppia di formule in \mathcal{FL} vale

$$v(A \wedge B) = v(A) \cdot v(B).$$

Dimostrazione.

Per il Teorema 8.3.1 è sufficiente dimostrare la proposizione per la seguente matrice estesa:

	p	q	$p \wedge q$
v_1	1	1	1
v_2	1	0	0
v_3	0	1	0
v_4	0	0	0

in cui stipuliamo $A = p$ e $B = q$. Osserviamo che, riga per riga, $v(p \wedge q)$ coincide

con il prodotto di $v(p)$ e $v(q)$: infatti $1 \cdot 1 = 1$, mentre $1 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 0$ e $0 \cdot 0 = 0$. ■

Approfondimento: Congiunzione e \min

Nel contesto binario $\{0, 1\}$ il prodotto non è l'unica funzione adeguata a rappresentare la congiunzione proposizionale. Un'altra è la funzione di *minimo*:

$$v(A \wedge B) = \min\{v(A), v(B)\}.$$

8.4.3 Disgiunzione

Proposizione 4 (Disgiunzione e somma troncata)

Sull'insieme $\{0, 1\}$ la disgiunzione booleana \vee coincide con l'operazione di *somma troncata a 1*:

$$v(A \vee B) = v(A) \oplus^1 v(B).$$

In particolare, per ogni formula A e B vale

$$v(A \vee B) = \begin{cases} 1 & \text{se } v(A) + v(B) \geq 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dimostrazione.

Per il Teorema 8.3.1 è sufficiente dimostrare la proposizione per la seguente matrice estesa:

	p	q	$p \vee q$
v_1	1	1	1
v_2	1	0	1
v_3	0	1	1
v_4	0	0	0

Ispezionando la matrice si osserva immediatamente la corrispondenza tra il valore di verità della disgiunzione e della somma troncata a 1. In particolare per v_1 si noti che $1 \oplus^1 1 = 1$. ■

Approfondimento: Disgiunzione e \max

In modo analogo, o come si dice in questo contesto, **duale**, al caso della congiunzione, un'altra funzione che rappresenta $v(p \vee q)$ è il massimo fra $v(p)$ e $v(q)$. Infatti $\max\{1, 1\} = 1$, $\max\{1, 0\} = 1$, $\max\{0, 1\} = 1$ e $\max\{0, 0\} = 0$. ◀

Alla luce delle **Condizioni di verità dell'implicazione Booleana** (si veda pag. 21) la rappresentazione algebrica dell'implicazione non vi sorprenderà.

8.4.4 Implicazione

Proposizione 5 (Implicazione e ordine)

Sull'insieme $\{0, 1\}$ l'implicazione booleana \rightarrow si esprime con la relazione \leq . In particolare, per ogni formula A e B vale

$$v(A \rightarrow B) = \begin{cases} 1 & v(A) \leq v(B), \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dimostrazione.

Per il Teorema 8.3.1 è sufficiente dimostrare la proposizione per la seguente matrice estesa:

	p	q	$p \rightarrow q$
v_1	1	1	1
v_2	1	0	0
v_3	0	1	1
v_4	0	0	1

in cui stipuliamo $A = p$ e $B = q$. Osserviamo che v_2 è l'unica valutazione in cui $v(q) < v(p)$, ed è l'unica in cui l'implicazione ha valore 0. ■

Approfondimento: Implicazione e \max

Anche in questo caso la funzione che abbiamo identificato non è l'unica con cui possiamo esprimere matematicamente il connettivo di implicazione Booleana. Ispezionando la matrice estesa della dimostrazione precedente notiamo infatti che il valore di verità di $p \rightarrow q$ coincide con la funzione

$$v(p \rightarrow q) = \max\{1 - v(p), v(q)\}.$$

Infatti, se $v(p) = 0$ allora $1 - v(p) = 1$ e quindi $v(p \rightarrow q) = 1$, mentre se $v(p) = 1$ si ha $v(p \rightarrow q) = v(q)$. ◀

Un secondo di riflessione vi basterà per notare una conseguenza tanto immediata quanto interessante del fatto appena illustrato.

Approfondimento: Ridondanza di \rightarrow

In presenza della disgiunzione e della negazione, l'implicazione Booleana è eliminabile senza perdita di informazioni. ◀

Ma c'è di più!

Approfondimento: Ridondanza di \vee

Poiché \max è esprimibile come $1 - \min$ abbiamo

$$\max\{1 - v(p), v(q)\} = 1 - \min\{v(p), 1 - v(q)\}.$$



Possiamo dunque esprimere (non soltanto l'implicazione) ma qualsiasi disgiunzione in termini di negazione (1-) e congiunzione (\min). Con questa formulazione ritrovate l'osservazione che vi permette di risolvere il Quesito 2.1.1: un'implicazione è vera se è falsa (1-) la congiunzione (\min) dell'antecedente e della negazione del conseguente.

Torneremo sull'interdefinibilità dei connettivi nella Sezione 8.6.1.

8.5 Connettivi e operazioni insiemistiche

Problema 1

Dimostrare che l'insieme vuoto è contenuto in qualsiasi insieme.

Ricorderete dal Quesito 1.1.1 con cui abbiamo aperto questo volume che un insieme X si dice *sottoinsieme* di un insieme Y se tutti gli elementi di X sono elementi di Y . Nella Parte I non serviva, e quindi ve l'abbiamo risparmiata. Ma si può dare una definizione rigorosa di questa importante relazione.

Definizione 8.5.1 (Inclusione tra insiemi)

L'insieme X è contenuto nell'insieme Y (equivalentemente, X è un sottoinsieme di Y) scritto $X \subseteq Y$ se vale la seguente condizione:

$$\forall x \in \mathcal{U}, \text{ se } x \in X \text{ allora } x \in Y.$$

La Definizione di **Inclusione tra insiemi** (si veda pag. 169) rende il ragionamento che porta alla soluzione del nostro Problema immediato.

Dimostrazione.

Dobbiamo dimostrare che $\emptyset \subseteq Y$ per qualsiasi insieme Y . Secondo la definizione di **Inclusione tra insiemi** dobbiamo quindi dimostrare che se prendiamo un elemento $x \in \emptyset$ allora vale $x \in Y$. C'è tuttavia una difficoltà evidente: \emptyset non ha elementi! Ma, a un esame più attento, questo non è davvero un problema. La definizione di **Inclusione tra insiemi** infatti, è un'implicazione, e quindi è falsa soltanto nel caso in cui $x \in \emptyset$ ma $x \notin Y$. Non è possibile trovare alcun x tale che $x \in \emptyset$ e $x \notin Y$, poiché non esiste alcun $x \in \emptyset$. Quindi non si dà mai il caso in cui l'antecedente è vero e il conseguente falso. Così abbiamo dimostrato che l'insieme vuoto è contenuto in ogni insieme. ■

In questo argomento emerge chiaramente un rapporto molto stretto tra la relazione insiemistica di inclusione e l'implicazione Booleana. Succede anche per le operazioni elementari tra insiemi: intersezione, unione e complemento sono strettamente collegati, rispettivamente, a congiunzione, disgiunzione e negazione.

Per vederlo abbiamo bisogno di un po' di notazione.

Terminologia e Notazione: I modelli di una formula

Data una qualsiasi formula A denotiamo con $[A]$ l'insieme delle valutazioni che la soddisfano, cioè:

$$[A] = \{v \mid v(A) = 1\}. \quad (8.2)$$

Chiamiamo le valutazioni che appartengono a $[A]$ i **modelli di A** . ◀

Prima di mettere a fuoco il rapporto tra operazioni insiemistiche e connettivi Booleani, ricordiamo le definizioni rilevanti.

Definizione 8.5.2 (Intersezione tra insiemi)

L'intersezione di due insiemi X e Y è l'insieme degli elementi che appartengono sia a X sia a Y , ed è indicata con $X \cap Y$. Più precisamente:

$$X \cap Y = \{x \mid x \in X \text{ e } x \in Y\}.$$

Definizione 8.5.3 (Unione tra insiemi)

L'unione di due insiemi X e Y è l'insieme degli elementi che appartengono ad almeno uno dei due insiemi, ed è indicata con $X \cup Y$. Più precisamente:

$$X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ oppure } x \in Y\}.$$

Definizione 8.5.4 (Complemento di un insieme)

Dato un insieme universo \mathcal{U} e un insieme $X \subseteq \mathcal{U}$, il *complemento di X rispetto a \mathcal{U}* è l'insieme degli elementi di \mathcal{U} che non appartengono a X , ed è indicato con $\mathcal{U} \setminus X$. Più precisamente:

$$\mathcal{U} \setminus X = \{x \in \mathcal{U} \mid x \notin X\}.$$

Quando non è importante specificare l'universo rispetto a cui si prende il complemento di un insieme X lo si denota con X' .

8.5.1 Disgiunzione e unione

Fatto:

L'insieme dei modelli di una disgiunzione è dato dall'unione degli insiemi dei modelli dei disgiunti: $[A \vee B] = [A] \cup [B]$. ◀

Dimostrazione.

Supponiamo che $v \in [A \vee B]$, cioè $v(A \vee B) = 1$. Per il Teorema 8.3.1 questo significa che $v(A) = 1$ oppure $v(B) = 1$. Ma questo significa che $v \in [A]$ oppure $v \in [B]$, e cioè $v \in [A] \cup [B]$, come desiderato. ■

L'identità tra i modelli di una disgiunzione e l'unione dei modelli dei suoi disgiunti è illustrata graficamente nella Figura 8.1.

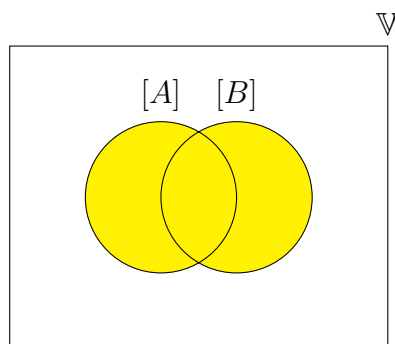


Figura 8.1: Rappresentazione diagrammatica dell'insieme dei modelli di $A \vee B$. L'universo è costituito dall'insieme di tutte le valutazioni booleane \mathbb{V} .

8.5.2 Congiunzione e intersezione

Fatto:

L'insieme dei modelli di una congiunzione è dato dall'intersezione degli insiemi dei modelli dei congiunti: $[A \wedge B] = [A] \cap [B]$. ◀

Dimostrazione.

Supponiamo che $v \in [A \wedge B]$, cioè $v(A \wedge B) = 1$. Per il Teorema 8.3.1 questo significa che entrambe $v(A) = 1$ e $v(B) = 1$. Dunque che $v \in [A]$ e $v \in [B]$, e cioè $v \in [A] \cap [B]$, come desiderato. ■

L'identità tra l'insieme dei modelli di una congiunzione e l'intersezione dei modelli dei suoi congiunti è illustrata graficamente nella Figura 8.2.

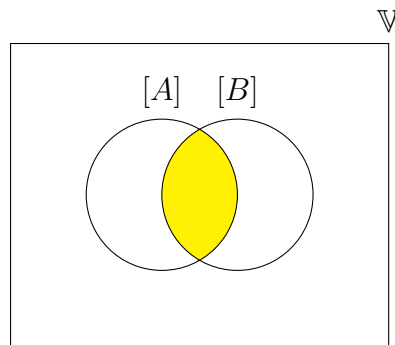


Figura 8.2: Rappresentazione diagrammatica dell'insieme dei modelli di $A \wedge B$. L'universo è costituito dall'insieme di tutte le valutazioni booleane \mathbb{V} .

8.5.3 Negazione e complemento

Fatto:

L'insieme dei modelli della negazione di una formula è dato dal complemento dell'insieme dei suoi modelli: $[\neg A] = \mathbb{V} \setminus [A]$. ◀

Dimostrazione.

Supponiamo che $v \in [\neg A]$, cioè $v(\neg A) = 1$. Per il Teorema 8.3.1 questo significa che $v(A) = 0$. Ma questo equivale a dire che $v \notin [A]$, e dunque che $v \in \mathbb{V} \setminus [A]$, come desiderato. ■

L'identità tra l'insieme dei modelli della negazione di una formula e il complemento, rispetto a \mathbb{V} , dell'insieme dei suoi modelli è illustrata graficamente nella Figura 8.3.

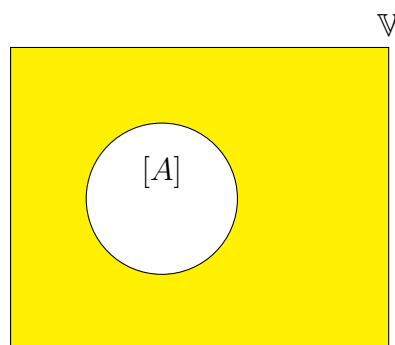


Figura 8.3: Rappresentazione diagrammatica dell'insieme dei modelli di $\neg A$. L'universo è costituito dall'insieme di tutte le valutazioni booleane \mathbb{V} .

8.6 Proprietà dei connettivi

Abbiamo introdotto la relazione di **equivalenza logica** nel ragionamento che ha portato alla soluzione del Quesito 2.3.2. E in quel contesto l'abbiamo usata per giustificare l'interdefinibilità tra congiunzione e disgiunzione (tramite la negazione) che emerge implicitamente anche nella discussione della Sezione 8.5.

La pratica con i quesiti del Capitolo 2 dovrebbe facilmente avervi fatto internalizzare la prossima definizione.

Definizione 8.6.1 (Equivalenza logica)

Date $A, B \in \mathcal{FL}$, diciamo che A e B sono *logicamente equivalenti*, scritto $A \equiv B$ se vale

$$\forall v \in V, v(A) = v(B).$$

Ricordate che fissato \mathcal{L} , le valutazioni corrispondono esattamente alle righe dell'opportuna matrice Booleana. Dunque la **Equivalenza logica** (si veda 173) stabilisce che due formule sono logicamente equivalenti esattamente quando hanno la stessa matrice Booleana.

Attraverso l'equivalenza logica è possibile scoprire alcune proprietà fondamentali della logica proposizionale che vi aiuteranno molto nella risoluzione dei problemi. Partiamo dalle **Equivalenze (o leggi) di De Morgan** (si veda 46) che hanno ampiamente provato la loro utilità nei quesiti della Parte I.

8.6.1 Identità di De Morgan

Proposizione 6 (Identità di De Morgan)

Per qualsiasi coppia di formule $A, B \in \mathcal{FL}$ valgono

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B \quad (\wedge \vee)$$

$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B. \quad (\vee \wedge)$$

Dimostriamo l'equivalenza $(\wedge \vee)$, e vi lasciamo dimostrare l'altra nell'Esercizio 23.

Dimostrazione.

Per il Teorema 8.3.1 è sufficiente dimostrare la proposizione per la seguente

matrice estesa, dove $p = A$ e $q = B$:

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

Poiché per ogni valutazione le colonne di $\neg(p \wedge q)$ e di $\neg p \vee \neg q$ coincidono, segue che

$$\neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q).$$

Noterete che la dimostrazione dell'Identità ($\wedge \vee$) coincide (grazie al Teorema 8.3.1) con il ragionamento che ha portato alla soluzione del Quesito 2.3.2.

Terminologia e Notazione: Dualità

La Proposizione che stabilisce le **Identità di De Morgan** (si veda 173) cattura in modo esplicito la **dualità** tra congiunzione e disgiunzione che potreste aver già notato confrontando le matrici Booleane che definiscono i due connettivi:

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

La colonna di $p \vee q$ si ottiene da quella di $p \wedge q$ scambiando i valori 0 e 1 quando non sono identici, e simmetricamente, la colonna di $p \wedge q$ si ottiene da quella di $p \vee q$ effettuando lo stesso scambio. L'idea è visualizzabile osservando le anti-diagonali (colorate in arancione) delle seguenti matrici:

\vee	0	1	\wedge	0	1	max	0	1	min	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1

8.6.2 Commutatività

Come avete visto risolvendo l'Esercizio 17, la sintassi ha alcuni aspetti non particolarmente affini al modo in cui ragioniamo (matematicamente). In particolare potreste trovare un po' di difficoltà a ritenere $(p \wedge q)$ e $(q \wedge p)$ formule *distinte*. Questa difficoltà si spiega facilmente osservando che le due formule sono *logicamente equivalenti*. E

non si tratta di un'equivalenza qualsiasi: cattura una delle proprietà che stabiliscono un ponte matematico tra logica (proposizionale) e algebra (Booleana).

Poiché si tratta di proprietà molto utili e che avete usato ripetutamente nella soluzione dei quesiti della Parte I, vale la pena formulare esplicitamente le più importanti.

Proposizione 7 (Commutatività della congiunzione)

Per qualsiasi coppia di formule $A, B \in \mathcal{FL}$ vale

$$A \wedge B \equiv B \wedge A.$$

Dimostrazione.

La proprietà desiderata segue immediatamente dalla Proposizione 8.4.2, e dal fatto (che qui diamo per scontato!) che il prodotto è commutativo. ■

L'Esercizio 24 permette di applicare le identità di De Morgan alla Proposizione precedente per derivare la **commutatività della disgiunzione**.

8.6.3 Associatività

Proposizione 8 (Associatività)

Per qualsiasi tripla di formule $A, B, C \in \mathcal{FL}$ valgono

$$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C) \quad (\wedge\wedge)$$

$$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C). \quad (\vee\vee)$$

Dimostrazione.

Per il Teorema 8.3.1 è sufficiente dimostrare

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \quad \text{e} \quad (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r).$$

(1.) Associatività della congiunzione.

	p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$(p \wedge q) \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$
v_1	1	1	1	1	1	1	1
v_2	1	1	0	1	0	0	0
v_3	1	0	1	0	0	0	0
v_4	1	0	0	0	0	0	0
v_5	0	1	1	0	1	0	0
v_6	0	1	0	0	0	0	0
v_7	0	0	1	0	0	0	0
v_8	0	0	0	0	0	0	0

Poiché per ogni valutazione v_i le colonne di $(p \wedge q) \wedge r$ e di $p \wedge (q \wedge r)$ coincidono, segue che

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r).$$

(2.) Associatività della disgiunzione.

	p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$(p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
v_1	1	1	1	1	1	1	1
v_2	1	1	0	1	1	1	1
v_3	1	0	1	1	1	1	1
v_4	1	0	0	1	0	1	1
v_5	0	1	1	1	1	1	1
v_6	0	1	0	1	1	1	1
v_7	0	0	1	0	1	1	1
v_8	0	0	0	0	0	0	0

Poiché per ogni valutazione v_i le colonne di $(p \vee q) \vee r$ e di $p \vee (q \vee r)$ coincidono, segue che

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r).$$

8.6.4 Distributività

Proposizione 9 (Distributività)

Per qualsiasi tripla di formule $A, B, C \in \mathcal{FL}$ valgono

$$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \quad (\wedge \vee - \wedge \vee \wedge)$$

$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C). \quad (\vee \wedge - \vee \wedge \vee)$$

Dimostrazione.

Per il Teorema 8.3.1 è sufficiente dimostrare

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad \text{e} \quad p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

(1) Distributività di \wedge rispetto a \vee .

	p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
v_1	1	1	1	1	1	1	1
v_2	1	1	0	1	1	1	1
v_3	1	0	1	1	1	0	1
v_4	1	0	0	0	0	0	0
v_5	0	1	1	1	0	0	0
v_6	0	1	0	1	0	0	0
v_7	0	0	1	1	0	0	0
v_8	0	0	0	0	0	0	0

Poiché per ogni valutazione v_i le colonne di $p \wedge (q \vee r)$ e di $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ coincidono, segue che

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r).$$

(2) Distributività di \vee rispetto a \wedge .

	p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
v_1	1	1	1	1	1	1	1
v_2	1	1	0	0	1	1	1
v_3	1	0	1	0	1	1	1
v_4	1	0	0	0	1	1	1
v_5	0	1	1	1	1	1	1
v_6	0	1	0	0	0	1	0
v_7	0	0	1	0	0	0	0
v_8	0	0	0	0	0	0	0

Poiché per ogni valutazione v_i le colonne di $p \vee (q \wedge r)$ e di $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ coincidono, segue che

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

Gli Esercizi 27, 28, 29, e 30 vi permettono di mettere a frutto le osservazioni della Sezione 8.5 per derivare gli analoghi insiemistici delle Proposizioni 6, 7, 8, e 9.

8.6.5 Involutività della negazione

Proposizione 10 (Due negazioni affermano)

Per ogni formula $A \in \mathcal{FL}$ vale

$$\neg\neg A \equiv A. \quad (\neg\neg)$$

Dimostrazione.

Per il Teorema 8.3.1 è sufficiente dimostrare che, per ogni valutazione v ,

$$v(\neg\neg p) = v(p).$$

Ricordiamo che per ogni valutazione v ,

$$v(\neg B) = 1 - v(B).$$

Allora

$$v(\neg\neg p) = 1 - v(\neg p) = 1 - (1 - v(p)) = v(p).$$

Quindi $\neg\neg p \equiv p$, e perciò $\neg\neg A \equiv A$. ■

8.6.6 Tautologie e contraddizioni

Proposizione 11 (Identità e dominazione)

Sia $\vec{1}$ una qualsiasi tautologia e sia $\vec{0}$ una qualsiasi contraddizione. Allora, per ogni formula $A \in \mathcal{FL}$ valgono le seguenti equivalenze:

$$A \wedge \vec{1} \equiv A \quad (\wedge \vec{1})$$

$$A \vee \vec{0} \equiv A \quad (\vee \vec{0})$$

$$A \vee \vec{1} \equiv \vec{1} \quad (\vee \vec{1})$$

$$A \wedge \vec{0} \equiv \vec{0}. \quad (\wedge \vec{0})$$

Dimostrazione.

Per il Teorema 8.3.1 è sufficiente dimostrare che, per ogni valutazione v ,

$$v(p \wedge \vec{1}) = v(p), \quad v(p \vee \vec{0}) = v(p), \quad v(p \vee \vec{1}) = v(\vec{1}), \quad v(p \wedge \vec{0}) = v(\vec{0}).$$

Ricordiamo che dagli Approfondimenti [Congiunzione e Disgiunzione](#) (si vedano

pag. 166-167) segue che per ogni valutazione v ,

$$v(p \wedge q) = \min\{v(p), v(q)\} \quad \text{e} \quad v(p \vee q) = \max\{v(p), v(q)\}.$$

Notiamo infine che

$$v(\vec{1}) = 1 \quad \text{e} \quad v(\vec{0}) = 0.$$

Da queste osservazioni seguono immediatamente le equivalenze desiderate.

($\wedge\vec{1}$):

$$v(p \wedge \vec{1}) = \min\{v(p), v(\vec{1})\} = \min\{v(p), 1\} = v(p).$$

Quindi $p \wedge \vec{1} \equiv p$.

($\vee\vec{0}$):

$$v(p \vee \vec{0}) = \max\{v(p), v(\vec{0})\} = \max\{v(p), 0\} = v(p).$$

Quindi $p \vee \vec{0} \equiv p$.

($\vee\vec{1}$):

$$v(p \vee \vec{1}) = \max\{v(p), v(\vec{1})\} = \max\{v(p), 1\} = 1 = v(\vec{1}).$$

Quindi $p \vee \vec{1} \equiv \vec{1}$.

($\wedge\vec{0}$):

$$v(p \wedge \vec{0}) = \min\{v(p), v(\vec{0})\} = \min\{v(p), 0\} = 0 = v(\vec{0}).$$

Quindi $p \wedge \vec{0} \equiv \vec{0}$.

8.7 Completezza funzionale

Terminologia e Notazione: Letterali

Fissato un linguaggio proposizionale finito \mathcal{L} chiamiamo **letterali** le variabili proposizionali in \mathcal{L} e le loro negazioni. ◀

Definizione 8.7.1 (Atomi di \mathcal{L})

Diciamo che una congiunzione di letterali di \mathcal{L} è:

1. **Massimale** se contiene tutte le variabili proposizionali di \mathcal{L} (eventualmente negate);
2. **Consistente** se ha un modello.

Una congiunzione massimale e consistente di letterali di \mathcal{L} è detta **un atomo di \mathcal{L}**

Esempio:

Dato $\mathcal{L} = \{p, q\}$. I seguenti sono tutti e soli gli atomi di \mathcal{L} :

$$p \wedge q \quad p \wedge \neg q \quad \neg p \wedge q \quad \neg p \wedge \neg q.$$

Esempio:

Dato $\mathcal{L} = \{p, q\}$. I seguenti non sono atomi di \mathcal{L} :

- p (non è massimale)
- $p \wedge \neg p \wedge q$ (è massimale ma non è consistente)

Teorema 8.7.1 (Corrispondenza tra atomi e valutazioni)

Gli atomi di \mathcal{L} sono in corrispondenza biunivoca con le valutazioni su \mathcal{L}

Diamo sotto una dimostrazione dettagliata del Teorema, ma a una prima lettura vi consigliamo di concentrarvi sull'esempio riportato nella Figura 8.4.

La matrice illustra la corrispondenza nel caso $\mathcal{L} = \{p, q\}$. Si nota immediatamente che:

- presa una qualsiasi riga, esiste esattamente un atomo vero in quella riga;
- viceversa, preso un qualsiasi atomo, esiste esattamente una riga in cui quell'atomo è vero.

	p	q	$p \wedge q$	$p \wedge \neg q$	$\neg p \wedge q$	$\neg p \wedge \neg q$
v_1	1	1	1	0	0	0
v_2	1	0	0	1	0	0
v_3	0	1	0	0	1	0
v_4	0	0	0	0	0	1

Figura 8.4: Illustrazione della corrispondenza tra atomi e valutazioni

Quindi l'atomo $p \wedge q$ esprime con una formula (parte della sintassi) la valutazione v_1 (parte della semantica). Infatti la valutazione v_1 asserisce che p è vera e q è vera, cioè che è vera la loro congiunzione. E così per tutte le altre valutazioni e tutti gli altri atomi.

Dimostrazione.

Per dimostrare il Teorema 8.7.1 fissiamo il linguaggio finito $\mathcal{L} = \{p_1, \dots, p_n\}$. Dalla Definizione 8.7.1 un atomo (su \mathcal{L}) è una congiunzione di letterali della forma

$$\alpha = \ell_1 \wedge \dots \wedge \ell_n, \quad \text{dove} \quad \ell_i \in \{p_i, \neg p_i\}.$$

Indichiamo con $\mathbb{A} \approx$ l'insieme di tutti gli atomi su \mathcal{L} e con \mathbb{V} l'insieme di tutte le valutazioni $v : \mathcal{L} \rightarrow \{0, 1\}$.

Iniziamo dimostrando che ogni valutazione identifica esattamente un atomo.

(Da una valutazione a un atomo). Data una valutazione $v \in \mathbb{V}(\mathcal{L})$, definiamo l'atomo associato

$$\alpha_v = \ell_1 \wedge \ell_2 \wedge \dots \wedge \ell_n \quad \text{dove} \quad \ell_i = \begin{cases} p_i & \text{se } v(p_i) = 1, \\ \neg p_i & \text{se } v(p_i) = 0. \end{cases}$$

La costruzione garantisce che ciascun congiunto ℓ_i sia soddisfatto da v e dunque

$$v(\alpha_v) = 1.$$

Per vedere che l'identificazione è unica prendiamo un qualunque atomo $\alpha = \ell_1 \wedge \dots \wedge \ell_n$. Se per qualche indice i l'atomo contiene il letterale p_i ma $v(p_i) = 0$, allora $v(\ell_i) = 0$ e quindi $v(\alpha) = 0$. Analogamente, se α contiene $\neg p_i$ ma $v(p_i) = 1$, allora $v(\ell_i) = 0$ e quindi $v(\alpha) = 0$. Ne segue che un atomo può essere vero sotto v solo se, per ogni i , il suo i -esimo letterale coincide con la scelta fatta in α_v . Dunque

$$\text{se } v(\alpha) = 1 \text{ allora } \alpha = \alpha_v.$$

Dunque sotto ogni valutazione v esiste *esattamente un atomo vero*, ed è α_v .

(Da un atomo a una valutazione). Viceversa, dato un atomo $\alpha = \ell_1 \wedge \dots \wedge \ell_n$, definiamo una valutazione v_α ponendo

$$v_\alpha(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } \ell_i = p_i, \\ 0 & \text{se } \ell_i = \neg p_i. \end{cases}$$

Allora, per costruzione, ciascun letterale ℓ_i vale 1 sotto v_α , e quindi

$$v_\alpha(\alpha) = 1.$$

Inoltre, se $\alpha' \neq \alpha$ è un atomo, allora differisce da α in almeno un indice i ; quindi α' contiene la negazione di ℓ_i , che sotto v_α vale 0, e perciò

$$v_\alpha(\alpha') = 0.$$

Dunque sotto v_α l'unico atomo vero è esattamente α , concludendo la dimostrazione del Teorema 8.7.1

Vi consigliamo a questo punto di rivisitare il ragionamento che ha portato alla soluzione del Quesito 2.3.4 che anticipa il contenuto del Teorema appena dimostrato.

Chiudiamo il capitolo con un risultato che garantisce la cosiddetta **completezza funzionale** dell'insieme dei connettivi $\{\neg, \wedge, \vee\}$.

Teorema 8.7.2 (Forma normale disgiuntiva)

Data una qualsiasi formula $A \in \mathcal{FL}$ esiste una disgiunzione di atomi $D_A \in \mathcal{FL}$ che è logicamente equivalente ad A .

Terminologia e Notazione: Costituenti di A

Con una terminologia introdotta da George Boole, gli atomi che compaiono in D_A sono anche chiamati i *costituenti di A* . ◀

Dimostrazione.

Sia $\mathcal{L} = \{p_1, \dots, p_n\}$. Per il Teorema 8.7.1, per ogni valutazione v su \mathcal{L} esiste esattamente un atomo α_v tale che $v(\alpha_v) = 1$ e viceversa preso un atomo α esiste esattamente una valutazione v_α tale che $v_\alpha(\alpha) = 1$.

Per costruire la disgiunzione di atomi equivalente ad A consideriamo $[A]$ (l'insieme delle valutazioni che rendono vera A). Ci interessa scrivere ora la disgiunzione di tutti gli atomi/valutazioni che rendono vera A , e lo facciamo così:

$$D_A = \bigvee_{v \in [A]} \alpha_v,$$

Per costruzione dunque D_A è una disgiunzione di atomi, vuota nel caso in cui A sia una contraddizione.

Prendiamo ora una valutazione $v' \in \mathbb{V}$ e consideriamo i due casi possibili.

(1. $v'(A) = 1$)

Poiché $v'(A) \in [A]$ abbiamo già incluso $\alpha_{v'}$ in D_A . E poiché $v'(\alpha_{v'}) = 1$, segue

$$v'(D_A) = 1.$$

(2. $v'(A) = 0$)

In questo caso $v' \notin [A]$, quindi l'atomo $\alpha_{v'}$ non compare nella disgiunzione D_A . Quindi tutti gli atomi che compaiono in D_A sono della forma $\alpha_{v''}$ con $v'' \neq v'$.

Per il Teorema 8.7.1 ciascun atomo α_v è vero esattamente in una riga della matrice Booleana, precisamente in quella corrispondente alla valutazione v , ed è falso in tutte le altre righe. In particolare, se $v'' \neq v'$ allora nella riga v' della matrice Booleana si ha

$$v'(\alpha_v) = 0.$$

Dunque, nella riga corrispondente alla valutazione v' , tutte le colonne degli atomi che compaiono in D_A contengono il valore 0. Quindi la disgiunzione di tali colonne assume valore 0, cioè

$$v'(D_A) = 0.$$

Mettendo insieme i due casi abbiamo dimostrato che per ogni valutazione v su \mathcal{L} vale

$$v(D_A) = v(A),$$

cioè per la Definizione di **Equivalenza logica** $A \equiv D_A$, come desiderato. ■

Per convenzione fissiamo:

- se $[A] = \emptyset$ (cioè $A = \vec{0}$) allora D_A è la disgiunzione composta da 0 atomi (la disgiunzione vuota);
- se $[A] = \mathbb{V}$ (cioè $A = \vec{1}$) allora D_A è la disgiunzione composta da tutti gli atomi.

Notate che la formula D_A che abbiamo costruito nella dimostrazione è una *disgiunzione di atomi*, e poiché gli atomi sono *congiunzioni di letterali* e poiché i letterali sono variabili proposizionali o *negazioni* di variabili proposizionali, concludiamo che **qualsiasi formula in \mathcal{FL} è esprimibile con i tre connettivi \neg, \wedge, \vee** .

Mettiamo queste considerazioni in pratica con qualche esempio.

Esempio:

Consideriamo la congiunzione

$$A = p \wedge q.$$

	p	q	$p \wedge q$
v_1	1	1	1
v_2	1	0	0
v_3	0	1	0
v_4	0	0	0

Si ha

$$[p \wedge q] = \{v_1\}.$$

L'unico atomo vero sotto v_1 è $p \wedge q$, dunque

$$p \wedge q \equiv (p \wedge q),$$

cioè la congiunzione è equivalente alla disgiunzione di atomi fatta unicamente dalla congiunzione stessa. ◀

Esempio:

Consideriamo la formula

$$A = p \rightarrow q.$$

Costruiamo la matrice booleana per p, q e individuiamo le valutazioni che rendono vera A .

	p	q	$p \rightarrow q$
v_1	1	1	1
v_2	1	0	0
v_3	0	1	1
v_4	0	0	1

Dalla matrice si ricava:

$$[p \rightarrow q] = \{v_1, v_3, v_4\}.$$

Agli elementi di $[p \rightarrow q]$ corrispondono gli atomi:

$$\alpha_{v_1} = p \wedge q, \quad \alpha_{v_3} = \neg p \wedge q, \quad \alpha_{v_4} = \neg p \wedge \neg q.$$

Dunque

$$p \rightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q).$$

Esempio:

Consideriamo:

$$A = \neg(p \wedge q).$$

	p	q	$\neg(p \wedge q)$
v_1	1	1	0
v_2	1	0	1
v_3	0	1	1
v_4	0	0	1

Quindi

$$[\neg(p \wedge q)] = \{v_2, v_3, v_4\}.$$

Gli atomi corrispondenti sono:

$$\alpha_{v_2} = p \wedge \neg q, \quad \alpha_{v_3} = \neg p \wedge q, \quad \alpha_{v_4} = \neg p \wedge \neg q.$$

Pertanto

$$\neg(p \wedge q) \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q).$$

Fino a qui abbiamo considerato soltanto esempi con due variabili proposizionali. Nel prossimo ne prendiamo tre.

Esempio:

Consideriamo la formula

$$A = (p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee r).$$

Costruiamo la matrice booleana per le variabili proposizionali p, q, r .

	p	q	r	$p \rightarrow q$	$p \vee r$	A
v_1	1	1	1	1	1	1
v_2	1	1	0	1	1	1
v_3	1	0	1	0	1	1
v_4	1	0	0	0	1	1
v_5	0	1	1	1	1	1
v_6	0	1	0	1	0	0
v_7	0	0	1	1	1	1
v_8	0	0	0	1	0	0

Le righe evidenziate in verde sono esattamente quelle in cui la formula A assume valore 1. Pertanto

$$[A] = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_7\}.$$

Agli elementi di $[A]$ corrispondono i seguenti atomi:

$$\begin{aligned} \alpha_{v_1} &= p \wedge q \wedge r, & \alpha_{v_2} &= p \wedge q \wedge \neg r, \\ \alpha_{v_3} &= p \wedge \neg q \wedge r, & \alpha_{v_4} &= p \wedge \neg q \wedge \neg r, \\ \alpha_{v_5} &= \neg p \wedge q \wedge r, & \alpha_{v_7} &= \neg p \wedge \neg q \wedge r. \end{aligned}$$

Segue quindi che la formula A è logicamente equivalente alla seguente disgiunzione di atomi:

$$\begin{aligned} (p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee r) &\equiv (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee \\ &\quad (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r). \end{aligned}$$

Avrete sicuramente notato che

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee r) \equiv p \vee r.$$

Infatti $[A] = [p \vee r]$.

Possiamo usare il Teorema 8.7.2 per risolvere il seguente tipo di problema: data una matrice Booleana, trovare la formula D_A che ha quella data come matrice Booleana.

Esempio:

Consideriamo due variabili p, q e una formula A tale che, nella matrice booleana,

la colonna di A sia

1001.

	p	q	A
v_1	1	1	1
v_2	1	0	0
v_3	0	1	0
v_4	0	0	1

Dunque

$$[A] = \{v_1, v_4\}.$$

Gli atomi corrispondenti sono

$$\alpha_{v_1} = p \wedge q, \quad \alpha_{v_4} = \neg p \wedge \neg q.$$

Quindi la formula richiesta è

$$A \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q).$$

Esempio:

Consideriamo tre variabili p, q, r e una formula A tale che la colonna di A sia

01010101.

	p	q	r	A
v_1	1	1	1	0
v_2	1	1	0	1
v_3	1	0	1	0
v_4	1	0	0	1
v_5	0	1	1	0
v_6	0	1	0	1
v_7	0	0	1	0
v_8	0	0	0	1

Dunque

$$[A] = \{v_2, v_4, v_6, v_8\}.$$

Gli atomi corrispondenti sono

$$\alpha_{v_2} = p \wedge q \wedge \neg r, \quad \alpha_{v_4} = p \wedge \neg q \wedge \neg r, \quad \alpha_{v_6} = \neg p \wedge q \wedge \neg r, \quad \alpha_{v_8} = \neg p \wedge \neg q \wedge \neg r.$$

Quindi

$$A \equiv (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r).$$

I due esempi appena illustrati rendono conto del consiglio che vi abbiamo dato nel Capitolo 2 su come leggere le matrici Booleane:

- le *righe* esprimono una *coniunzione*;
- le *colonne* esprimono una *disgiunzione*.

Quindi una formula A è logicamente equivalente alla disgiunzione degli atomi/valutazioni che rendono A vera.

8.8 Esercizi

Esercizio 22

Dimostrare quanto asserito nell'Approfondimento *Congiunzione*.

Esercizio 23

Dimostrare l'Identità $(\forall \wedge)$ nella Proposizione 6.

Esercizio 24

Dimostrare la commutatività della disgiunzione.

Esercizio 25

Dimostrare quanto asserito nell'Approfondimento *Disgiunzione*.

Esercizio 26

Dimostrare che \max è associativa, ovvero per qualsiasi $A, B, C \in \mathcal{FL}$, vale:

$$\max\{\max\{v(A), v(B)\}, v(C)\} = \max\{v(A), \max\{v(B), v(C)\}\}. \quad (\max \max)$$

Esercizio 27

Dimostrare che le seguenti identità sono valide per qualsiasi coppia di insiemi X, Y

$$(X \cap Y)' = X' \cup Y'$$
$$(X \cup Y)' = X' \cap Y'.$$

Esercizio 28

Dimostrare che le seguenti identità sono valide per qualsiasi coppia di insiemi X, Y :

$$X \cap Y = Y \cap X$$
$$X \cup Y = Y \cup X.$$

Esercizio 29

Dimostrare che le seguenti identità sono valide per qualsiasi tripla di insiemi X, Y, Z :

$$(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$$
$$(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z).$$

Esercizio 30

Dimostrare che le seguenti identità sono valide per qualsiasi tripla di insiemi X, Y, Z :

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$$
$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z).$$

Esercizio 31★

Enunciare e stabilire Identità di De Morgan per i quantificatori in un dominio finito di vostra scelta. [Suggerimento: sfruttate il fatto che un quantificatore universale esprime una congiunzione.]

Esercizio 32

Definiamo un nuovo connettivo ponendo

	p	q	$p \leftrightarrow q$
v_1	1	1	1
v_2	1	0	0
v_3	0	1	0
v_4	0	0	1

Dimostrare che

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p).$$

Esercizio 33

Considerate l'insieme di tutti i possibili connettivi definibili con le variabili proposizionali p, q .

p	q	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0

1. A quali funzioni corrispondono i connettivi che compaiono nella Definizione 7.3.1?
2. Date un nome e un' interpretazione a quanti più connettivi riuscite.

Esercizio 34★

Con riferimento alla matrice dell'Esercizio 33, escludere con opportuni argomenti tutte le funzioni che non catturano l'idea intesa di *implicazione Booleana*.

Esercizio 35

Rappresentare la formula

$$A = (p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$$

come disgiunzione di atomi.

Esercizio 36

Rappresentare la formula

$$A = p$$

come disgiunzione di atomi.

Esercizio 37

Consideriamo quattro variabili p, q, r, s e una formula A tale che la colonna di A sia

01010101010100.

Individuare D_A (cioè la disgiunzione di atomi che è logicamente equivalente ad A).

9 *Calculemus!*

Grazie alla Scomposizione univoca (si veda pag. 149) e alla Composizionalità della semantica proposizionale (si veda pag. 163) è possibile definire **procedure per decidere** se:

- una formula è **soddisfacibile**;
- una formula è una **tautologia** (o una **contraddizione**);
- una formula **segue logicamente** da un insieme di formule;
- due formule sono **logicamente equivalenti**.

In questo capitolo definiremo due tipi di procedure di decisione basate rispettivamente sulle matrici Booleane e sugli alberi di refutazione.

Sono procedure che risolvono il problema posto matematicamente da George Boole nel suo *The Laws of Thought* e anticipato da Gottfried Leibniz con il suo celebre *Calculemus!*: identificare un algoritmo per decidere della **validità logica** degli argomenti.

9.1	Procedure basate sulle matrici Booleane	192
9.2	Validità degli argomenti . .	200
9.3	Procedure basate sugli alberi di refutazione	203
9.4	Confronto tra matrici Booleane e alberi di refutazione	212
9.5	Esercizi	217

9.1 Procedure basate sulle matrici Booleane

9.1.1 Soddisfacibilità

Definizione 9.1.1 (Soddisfacibilità)

Diciamo che *una formula* $A \in \mathcal{FL}$ è *soddisfacibile* se esiste una valutazione $v \in \mathbb{V}$ tale che $v(A) = 1$.

Analogamente diciamo che *un insieme di formule* $X \subseteq \mathcal{FL}$ è *soddisfacibile* se esiste una valutazione $v \in \mathbb{V}$ tale che $v(A_x) = 1$ per tutte le formule $A_x \in X$.

Terminologia e Notazione:

Ricordate che denotiamo con $[A]$ l'insieme dei *modelli di A*. Queste non sono altro che tutte le valutazioni che *soddisfano A*. ◀

Esempio:

Siano $A, B \in \mathcal{FL}$. L'insieme $X = \{B, A \rightarrow B, A\}$ è soddisfacibile.

Per la [Composizionalità della semantica proposizionale](#) (si veda pag. 163) e per la Definizione di [Soddisfacibilità](#) (si veda pag. 192) è sufficiente esibire una valutazione tale che $v(q) = v(p \rightarrow q) = v(p) = 1$.

	p	q	$p \rightarrow q$
v_1	1	1	1
v_2	1	0	0
v_3	0	1	1
v_4	0	0	1

La matrice Booleana di $p \rightarrow q$ mostra che v_1 è l'unica valutazione che soddisfa simultaneamente q , $p \rightarrow q$ e p . ◀

Ricordate: le righe delle matrici Booleane esprimono congiunzioni. Quindi v_1 nell'esempio appena discusso soddisfa la formula $q \wedge (p \rightarrow q) \wedge p$.

Approfondimento: Soddisfacibilità e coerenza

La Definizione 9.1.1 cattura formalmente il concetto informale di **coerenza**. Un insieme di formule X , infatti, è soddisfacibile se esiste una valutazione che le rende tutte simultaneamente vere. Quella valutazione, riprendendo la terminologia della Parte I, mostra che esiste una *situazione possibile* in cui la congiunzione delle formule in X è vera. Dunque è coerente asserire simultaneamente tutte le proposizioni espresse da X . ◀

Segue dalla Definizione di **Soddisfacibilità** (si veda pag. 192) che un insieme di enunciati *non è soddisfacibile* se non esiste alcuna valutazione che renda veri tutti gli enunciati dell'insieme.

Esempio:

Siano $A, B \in \mathcal{FL}$. Mostriamo che l'insieme

$$X = \{\neg A, A \vee B, \neg B\}$$

non è soddisfacibile.

Per la **Composizionalità della semantica proposizionale** (si veda pag. 163) e per la Definizione di **Soddisfacibilità** sarebbe necessario esibire una valutazione tale che

$$v(\neg p) = v(p \vee q) = v(\neg q) = 1.$$

Verifichiamo che ciò è impossibile ispezionando la matrice booleana.

	p	q	$\neg p$	$p \vee q$	$\neg q$
v_1	1	1	0	1	0
v_2	1	0	0	1	1
v_3	0	1	1	1	0
v_4	0	0	1	0	1

Poiché nessuna valutazione soddisfa la congiunzione di $\neg p, p \vee q$ e $\neg q$, X non è soddisfacibile. ◀

Mostriamo ora che il problema della soddisfacibilità di una formula è decidibile con le matrici Booleane.

Procedura 1: Procedura di decisione della soddisfacibilità con le matrici Booleane

Input: un insieme finito di formule $X = \{A_1, \dots, A_m\} \subseteq \mathcal{FL}$.

Output: SODDISFACIBILE oppure NON SODDISFACIBILE.

1. Identifica $\mathcal{L} = \{p_1, \dots, p_n\}$ con l'insieme di tutte le variabili proposizionali che compaiono in almeno una formula di X .
2. Elenca tutte le 2^n valutazioni $v : \mathcal{L} \rightarrow \{0, 1\}$.
3. Costruisci la matrice booleana su \mathcal{L} :
 - una riga per ogni valutazione v ;
 - una colonna per ciascuna variabile p_i ;
 - aggiungi, usando la **Composizionalità della semantica proposizionale** (si veda pag. 163), le colonne corrispondenti alle formule A_1, \dots, A_m .

4. **Per ogni riga** v della matrice:

- **se** $v(A_1) = v(A_2) = \dots = v(A_m) = 1$, **allora**
 - restituisci SODDISFACIBILE;
 - arresta l'algoritmo.

5. Se nessuna riga soddisfa la condizione precedente, restituisci NON SODDISFACIBILE.

La procedura appena descritta fornisce un **algoritmo di decisione**. Si tratta infatti di un insieme finito di passi che restituisce sempre uno dei due output possibili. Si tratta inoltre di una procedura **corretta** poiché restituisce SODDISFACIBILE se e solo se esiste una valutazione che rende vere tutte le formule di X , cioè se e solo se X è soddisfacibile per definizione.

9.1.2 Tautologicità

Definizione 9.1.2 (Tautologia)

Diciamo che *una formula* $A \in \mathcal{FL}$ è *una tautologia* se $v(A) = 1$ per ogni valutazione $v \in \mathbb{V}$.

Esempio:

Siano $A, B \in \mathcal{FL}$. Mostriamo che la formula

$$C = (A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$$

è una tautologia.

Per la **Composizionalità della semantica proposizionale** (si veda pag. 163) e per la **Definizione di Tautologia** (si veda pag. 194) è sufficiente mostrare che per ogni valutazione v vale

$$v((p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q) = 1.$$

	p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$
v_1	1	1	1	1	1
v_2	1	0	0	0	1
v_3	0	1	1	0	1
v_4	0	0	1	0	1

La matrice Booleana sopra mostra che l'ultima colonna vale sempre 1. Dunque, per ogni valutazione v , $v((p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q) = 1$, e quindi C è una tautologia. ◀

Esempio:

Siano $A, B \in \mathcal{FL}$. Mostriamo che la formula

$$C = (B \wedge (A \rightarrow B)) \wedge A$$

non è una tautologia.

Per la **Composizionalità della semantica proposizionale** (si veda pag. 163) e per la Definizione di **Tautologia** (si veda pag. 194) è sufficiente esibire una valutazione v tale che

$$v(q \wedge (p \rightarrow q) \wedge p) = 0.$$

	p	q	$p \rightarrow q$	$q \wedge (p \rightarrow q)$	$q \wedge (p \rightarrow q) \wedge p$
v_1	1	1	1	1	1
v_2	1	0	0	0	0
v_3	0	1	1	1	0
v_4	0	0	1	0	0

La matrice Booleana sopra mostra che per v_2 vale $v_2(q \wedge (p \rightarrow q) \wedge p) = 0$. Dunque la formula C non è vera in tutte le valutazioni, cioè non è una tautologia. ◀

Notate che per **Composizionalità della semantica proposizionale** (si veda pag. 163) la negazione di una tautologia è una *contraddizione*.

Terminologia e Notazione: Formule contingenti

Una formula che non sia né una tautologia, né una contraddizione si dice **contingente**. ▶

Come nel caso della soddisfacibilità, la tautologicità di una formula è decidibile con le matrici Booleane.

Procedura 2: Procedura di decisione della tautologicità con le matrici Booleane

Input: una formula $A \in \mathcal{FL}$.

Output: TAUTOLOGIA oppure NON TAUTOLOGIA.

1. Identifica $\mathcal{L} = \{p_1, \dots, p_n\}$ con l'insieme di tutte le variabili proposizionali che compaiono in A .
2. Elenca tutte le 2^n valutazioni $v : \mathcal{L} \rightarrow \{0, 1\}$.
3. Costruisci la matrice booleana su \mathcal{L} :
 - una riga per ogni valutazione v ;
 - una colonna per ciascuna variabile p_i ;

- aggiungi, usando le **Composizionalità della semantica proposizionale** (si veda pag. 163), la colonna corrispondente alla formula A .
4. **Per ogni riga** v della matrice:
- **se** $v(A) = 0$, **allora**
 - restituisci NON TAUTOLOGIA;
 - arresta l'algoritmo.
5. Se nessuna riga soddisfa la condizione precedente, restituisci TAUTOLOGIA.

9.1.3 Conseguenza logica

Nella Parte I, abbiamo caratterizzato la conseguenza logica in termini pratici identificandola in termini di **Segue da (conseguenza logica)** (si veda pag. 27). Per rispondere ai quesiti di quel genere abbiamo sempre usato (esplicitamente o meno) una matrice Booleana. Vediamo ora perché si tratta di un metodo corretto.

Definizione 9.1.3 (Conseguenza logica)

Dato un insieme di formule $X \subseteq \mathcal{FL}$ e una formula $B \in \mathcal{FL}$ diciamo che B *segue logicamente da* X , scritto

$$X \models B$$

se per ogni valutazione v :

$$\text{se } v(A_i) = 1 \text{ per tutte le formule } A_i \in X \text{ allora } v(B) = 1.$$

Esempio:

Siano $A, B \in \mathcal{FL}$. Mostriamo che

$$\{A, A \rightarrow B\} \models B.$$

Per la **Composizionalità della semantica proposizionale** (si veda pag. 163) e per la Definizione di **Conseguenza logica** (si veda pag. 196) è sufficiente mostrare che per ogni valutazione v vale:

$$\text{se } v(p) = v(p \rightarrow q) = 1, \text{ allora } v(q) = 1.$$

	p	q	$p \rightarrow q$
v_1	1	1	1
v_2	1	0	0
v_3	0	1	1
v_4	0	0	1

Dalla matrice si vede che l'unica riga in cui $v(p) = 1$ e $v(p \rightarrow q) = 1$ è v_1 , e in tale riga vale anche $v(q) = 1$. Poiché v_1 è l'unica valutazione in $[p \wedge (p \rightarrow q)]$, vale che tutte le valutazioni che soddisfano le premesse soddisfano anche la conclusione, cioè $p \wedge (p \rightarrow q) \models q$. ◀

Approfondimento: Congiunzione delle premesse

Notate che per la Definizione di **Soddisfacibilità** (si veda pag. 192) un insieme $X = \{A_1, \dots, A_n\}$ è soddisfatto se e solo se esiste una valutazione tale che $v(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) = 1$. Cioè, per testare la conseguenza logica dobbiamo concentrarci sui modelli della congiunzione di tutte le premesse in X e verificare che quei modelli siano inclusi tra i modelli di B :

$$[A_1 \wedge \dots \wedge A_n] \subseteq [B]$$

Esempio:

Siano $A, B \in \mathcal{FL}$. Mostriamo che

$$\{B, A \rightarrow B\} \not\models A.$$

Per la **Composizionalità della semantica proposizionale** (si veda pag. 163) e per la Definizione di **Conseguenza logica** (si veda pag. 196) è sufficiente esibire una valutazione v tale che

$$v(q) = v(p \rightarrow q) = 1 \quad \text{ma} \quad v(p) = 0.$$

	p	q	$p \rightarrow q$
v_1	1	1	1
v_2	1	0	0
v_3	0	1	1
v_4	0	0	1

La riga evidenziata v_3 mostra che esiste una valutazione tale che

$$v(q) = 1 \quad \text{e} \quad v(p \rightarrow q) = 1, \quad \text{ma} \quad v(p) = 0.$$

Dunque v_3 soddisfa entrambe le premesse B e $A \rightarrow B$, ma non soddisfa la conclusione A cioè:

$$\{B, A \rightarrow B\} \not\models A.$$

Terminologia e Notazione: Controesempio

La valutazione v_3 dell'Esempio precedente costituisce un **controesempio** alla relazione di **Conseguenza logica** (si veda pag. 196). ◀

Approfondimento: La conseguenza logica non è simmetrica

I due esempi discussi sopra mostrano, se presi insieme, che per la conseguenza conta quali formule sono premesse e quali conclusioni. Abbiamo infatti

$$(1) A \wedge (A \rightarrow B) \models B, \text{ ma}$$

$$(2) B \wedge (A \rightarrow B) \not\models A.$$

Quello che cambia è che in (1) A è tra le premesse e B è la conclusione, mentre in (2) B è tra le premesse e A è la conclusione. ▶

Procedura 3: Procedura di decisione della conseguenza logica con le matrici Booleane

Input: un insieme finito di formule $X = \{A_1, \dots, A_m\} \subseteq \mathcal{FL}$ e una formula $B \in \mathcal{FL}$.

Output: $X \models B$ oppure $X \not\models B$.

1. Identifica $\mathcal{L} = \{p_1, \dots, p_n\}$ con l'insieme di tutte le variabili proposizionali che compaiono in almeno una formula di $X \cup \{B\}$.
2. Elenca tutte le 2^n valutazioni $v : \mathcal{L} \rightarrow \{0, 1\}$.
3. Costruisci la matrice booleana su \mathcal{L} :
 - una riga per ogni valutazione v ;
 - una colonna per ciascuna variabile p_i ;
 - aggiungi, usando la **Composizionalità della semantica proposizionale** (si veda pag. 163), le colonne corrispondenti alle formule A_1, \dots, A_m e alla formula B .
4. **Per ogni riga** v della matrice:
 - **se** $v(A_1) = v(A_2) = \dots = v(A_m) = 1$ **e** $v(B) = 0$, **allora**
 - restituisci $X \not\models B$;
 - arresta l'algoritmo.
5. Se nessuna riga soddisfa la condizione precedente, restituisci $X \models B$.

9.1.4 Equivalenza logica

Nella risoluzione dei quesiti della Parte I abbiamo fatto uso frequente dell'equivalenza logica, che li abbiamo caratterizzato informalmente con le 'tavole di verità'.

Abbiamo poi dato la Definizione di **Equivalenza logica** (si veda pag. 173) in termini di coincidenza di valutazioni, e quindi, di matrici Booleane. Possiamo dare una definizione equivalente attraverso la conseguenza logica.

Proposizione 12 (Conseguenza ed equivalenza logica)

Siano A e B due formule in \mathcal{FL} . Vale che

$$A \equiv B \text{ se e solo se } A \models B \text{ e } B \models A.$$

Dimostrazione.

(Da sinistra a destra)

Supponiamo $A \equiv B$. Allora per la Definizione di **Equivalenza logica** (si veda pag. 173) $v(A) = v(B)$ per tutte le valutazioni v . Dunque, se $v(A) = 1$ allora $v(B) = 1$, e quindi $A \models B$ e $B \models A$, come richiesto.

(Da destra a sinistra)

Supponiamo $A \models B$ e $B \models A$. Dalla prima segue che $[A] \subseteq [B]$, cioè tutte le valutazioni che soddisfano A soddisfano anche B . Dalla seconda ipotesi segue l'inclusione inversa, e cioè $[B] \subseteq [A]$. Dunque $[A] = [B]$, e quindi per tutte le valutazioni vale $v(A) = v(B)$. Dunque $A \equiv B$, come desiderato. ■

Una conseguenza pratica immediata della Proposizione appena dimostrata è che la Procedura 3 (si veda pag. 198) fornisce un algoritmo per decidere anche l'equivalenza logica – basta applicarla in entrambi i versi.

Viceversa, se abbiamo una matrice Booleana che decide positivamente l'equivalenza logica, abbiamo in particolare che vale la conseguenza logica (in entrambi i versi).

Esempio:

Sia $A \in \mathcal{FL}$. Mostriamo che

$$\neg\neg A \models A.$$

Per il Teorema 8.3.1 è sufficiente dimostrare la proposizione per la seguente matrice booleana estesa (assumendo che A sia identificata con la variabile proposizionale p):

	p	$\neg p$	$\neg\neg p$
v_1	1	0	1
v_2	0	1	0

Osserviamo ora che per ogni valutazione v vale $v(\neg\neg A) = v(A)$. Dunque, in particolare, vale che se $v(\neg\neg A) = 1$ allora $v(A) = 1$, come desiderato. ◀

9.2 Validità degli argomenti

Problema 2 Il cane di Crisippo (S. Burris)

Dimostrare che Crisippo (279 – 206 a.C.) aveva ragione nell'affermare che i cani sono in grado di eseguire argomenti validi:

Inseguendo un coniglio, il cane scoprì che il sentiero si divideva improvvisamente in tre direzioni. Il cane annusò il primo sentiero e non trovò alcuna traccia; poi annusò il secondo sentiero e non trovò alcuna traccia; poi, senza preoccuparsi di annusare il terzo sentiero, corse lungo quel sentiero.

Terminologia e Notazione: Argomento (proposizionale)

Siano $X = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ un insieme finito di formule di \mathcal{FL} e sia $B \in \mathcal{FL}$. Denotiamo con

$$\frac{A_1 A_2 \dots A_n}{B}$$

l'**argomento** che ha B come **conclusione** e X come **premesse**. ◀

Definizione 9.2.1 (Argomento Valido)

Siano $X = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ un insieme finito di formule \mathcal{FL} e sia $B \in \mathcal{FL}$. Diciamo che l'argomento

$$\frac{A_1 A_2 \dots A_n}{B}$$

è *valido* (o *corretto*) se $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \models B$.

Segue dalla Sezione 9.1.3 che la validità degli argomenti proposizionali è decidibile con il metodo delle matrici Booleane. Applichamole quindi al Problema de [Il cane di Crisippo \(S. Burris\)](#) (si veda pag. 200).

Svolgimento:

Nello stile dei Quesiti della Parte I, identifichiamo le proposizioni del problema con variabili proposizionali come segue:

- p_1 = “il coniglio ha seguito il primo sentiero”
- p_2 = “il coniglio ha seguito il secondo sentiero”

- $p_3 =$ “il coniglio ha seguito il terzo sentiero”.

L'argomento di cui dobbiamo decidere la validità è dunque

$$\frac{p_1 \vee p_2 \vee p_3 \quad \neg p_1 \quad \neg p_2}{p_3}.$$

Seguiamo la Procedura 3 per mostrare che, per ogni valutazione v ,

$$\text{se } v(p_1 \vee p_2 \vee p_3) = v(\neg p_1) = v(\neg p_2) = 1, \text{ allora } v(p_3) = 1.$$

	p_1	p_2	p_3	$\neg p_1$	$\neg p_2$	$p_1 \vee p_2 \vee p_3$
v_1	1	1	1	0	0	1
v_2	1	1	0	0	0	1
v_3	1	0	1	0	1	1
v_4	1	0	0	0	1	1
v_5	0	1	1	1	0	1
v_6	0	1	0	1	0	1
v_7	0	0	1	1	1	1
v_8	0	0	0	1	1	0

Dalla matrice si vede che l'unica riga in cui valgono simultaneamente le premesse

$$v(p_1 \vee p_2 \vee p_3) = 1, \quad v(\neg p_1) = 1, \quad v(\neg p_2) = 1$$

è v_7 , e in tale riga vale $v_7(p_3) = 1$. Dunque

$$\{p_1 \vee p_2 \vee p_3, \neg p_1, \neg p_2\} \models p_3,$$

come desiderato. ▶

È tuttavia interessante esplorare un altro metodo di decisione per gli argomenti proposizionali, quello fornito dagli **alberi di refutazione** (anche detti **tableaux semantici**) di cui ora ci occupiamo.

Notiamo innanzitutto che segue dalla Definizione 9.2.1 che un argomento

$$\frac{A_1 A_2 \dots A_n}{B}$$

è valido se e solo se non esiste alcuna valutazione che soddisfa tutte le premesse ma non soddisfa la conclusione. Vale cioè il seguente teorema che esprime in modo generale quello che avete già imparato risolvendo l'Esercizio 40.

Teorema 9.2.1 (Tre formulazioni della validità)

Siano $X = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ un insieme finito di formule \mathcal{FL} e $B \in \mathcal{FL}$. Le seguenti sono equivalenti:

1. $\models (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B$.
2. $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \models B$
3. $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \cup \{\neg B\}$ non è soddisfacibile.

Inoltre, per la Definizione 9.2.1, sono tutte formulazioni equivalenti della validità dell'argomento

$$\frac{A_1 \ A_2 \ \dots \ A_n}{B}$$

Dimostrazione.

(1. implica 2.)

Supponiamo che $\models (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B$. per la Definizione di **Tautologia** (si veda pag. 194) per ogni valutazione v vale

$$v((A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B) = 1.$$

Dunque per la **Composizionalità della semantica proposizionale** (si veda pag. 163) non esiste alcuna valutazione v tale che

$$v \in [A_1 \wedge \dots \wedge A_n] \quad \text{e} \quad v \notin [B],$$

e quindi per la Definizione di **Conseguenza logica** (si veda pag. 196) segue che

$$\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \models B,$$

come desiderato.

(2. implica 3.)

Supponiamo che $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \models B$. Per la Definizione di **Conseguenza logica** (si veda pag. 196) non esiste alcuna valutazione v tale che

$$v \in [A_1 \wedge \dots \wedge A_n] \quad \text{e} \quad v \notin [B].$$

Per la **Composizionalità della semantica proposizionale** (si veda pag. 163) questo significa che non esiste alcuna valutazione v tale che

$$v \in [A_1 \wedge \dots \wedge A_n] \quad \text{e} \quad v \in [\neg B],$$

e per la definizione di **Soddisfacibilità** (si veda pag. 192) questo significa che $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \cup \{\neg B\}$ non è soddisfacibile, come desiderato.

(3. implica 1.)

Supponiamo che $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \cup \{\neg B\}$ non sia soddisfacibile. Per la Definizione di **Soddisfacibilità** (si veda pag. 192) non esiste alcuna valutazione v tale che

$$v \in [A_1 \wedge \dots \wedge A_n] \quad \text{e} \quad v \in [\neg B].$$

Per la **Composizionalità della semantica proposizionale** (si veda pag. 163) questo equivale a dire che non esiste alcuna valutazione v tale che

$$v \in [A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n] \quad \text{e} \quad v \notin [B].$$

e quindi per nessuna valutazione v vale

$$v((A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B) = 0,$$

cioè

$$\models (A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B,$$

come desiderato. ■

Una conseguenza pratica di grande importanza del Teorema 9.2.1 consiste nel fatto che per dimostrare la validità di un argomento

$$\frac{A_1 \ A_2 \ \dots \ A_n}{B}$$

è sufficiente mostrare che **non è possibile costruire un controesempio** alla tautologia

$$\models (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B.$$

Passiamo dunque a introdurre gli alberi di refutazione per decidere le tautologie.

9.3 Procedure basate sugli alberi di refutazione

9.3.1 Alberi di refutazione per decidere le tautologie

Supponiamo di voler decidere se vale

$$\models A \vee \neg A. \tag{9.1}$$

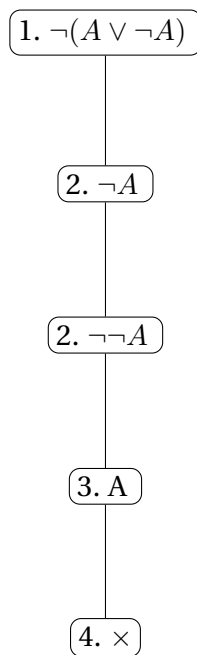
Sappiamo dalla Definizione di **Tautologia** (si veda pag. 194) che la (9.1) (si veda pag. 203) è vera esattamente se tutte le valutazioni v soddisfano $A \vee \neg A$. L'idea che informa il metodo degli *alberi di refutazione* è la ricerca di un *controesempio*, cioè di una valutazione che soddisfi la negazione $A \vee \neg A$.

Si danno due casi:

1. Abbiamo successo nel tentativo di trovare una valutazione v tale che $v(A \vee \neg A) = 0$. In questo caso concludiamo che *non è una tautologia*;

2. Non abbiamo successo nel tentativo di trovare una valutazione v tale che $v(A \vee \neg A) = 0$. In questo caso concludiamo che è *una tautologia*;

Come dice il nome, il tentativo di trovare il controesempio che ci interessa prevede la costruzione di un *albero*.



1. Poniamo alla radice dell'albero *la negazione della formula che stiamo testando per tautologicità*: $\neg(A \vee \neg A)$.
2. Poiché sappiamo che una disgiunzione è falsa soltanto se sono falsi entrambi i disgiunti, l'esplorazione dell'albero ci consentirà soltanto di considerare $\neg A$ e $\neg\neg A$ come nodi successivi alla radice.
3. Poiché $\neg\neg A$ è equivalente ad A , il ramo che abbiamo prodotto univocamente a partire dalla radice contiene l'insieme di formule non soddisfacibile $\{A, \neg A\}$. Sappiamo dall'Esercizio 38 che un ramo del genere non può più dare luogo a prolungamenti soddisfacibili. Lo diciamo dunque **un ramo chiuso**.
4. Poiché l'ipotesi che (9.1) sia falsa porta a un albero in cui tutti i rami (uno solo in questo caso) sono chiusi, concludiamo che la (9.1) è vera.

La chiusura dell'unico ramo dell'albero di refutazione che abbiamo costruito per $A \vee \neg A$ significa che non è possibile costruire un controesempio a $\models A \vee \neg A$, che dunque è vera.

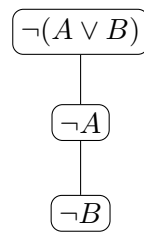
9.3.2 Regole di costruzione per gli alberi di refutazione

Terminologia e Notazione: Rami chiusi e aperti

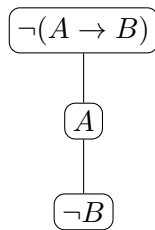
In un albero di refutazione \mathcal{R} un ramo si dice **chiuso** se contiene una formula e la sua negazione. Un ramo si dice **aperto** se non è chiuso. ◀

Regole non biforcanti: Queste regole estendono l'albero senza creare ramificazioni. L'eliminazione del connettivo principale della formula che etichetta il nodo n produce due successori, $n + 1$ ed $n + 2$, etichettati da due formule che congiuntamente sono equivalenti alla formula che etichetta il nodo n . Cioè $v(A_n) = 1$ se e solo se $v(A_{n+1}) = 1$ e $v(A_{n+2}) = 1$

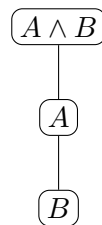
- **Regola ($\neg\vee$)**
Se il nodo n è etichettato con la formula $\neg(A \vee B)$ allora i nodi $n + 1$ e $n + 2$ saranno etichettati con le formule $\neg A$ e $\neg B$:



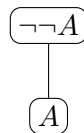
- Regola ($\neg \rightarrow$)
 Se il nodo n è etichettato con la formula $\neg(A \rightarrow B)$,
 allora i nodi $n + 1$ e $n + 2$ saranno etichettati con le formule A e $\neg B$



- Regola (\wedge)
 Se il nodo n è etichettato con la formula $A \wedge B$, allora i nodi $n + 1$ e $n + 2$ saranno etichettati con le formule A e B :

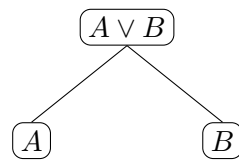


- Regola ($\neg\neg$): Se il nodo n è etichettato con la formula $\neg\neg A$ allora il nodo $n + 1$ sarà etichettato con la formula A :



Regole biforcanti: Queste regole estendono l'albero ramificandolo. L'eliminazione del connettivo principale della formula che etichetta il nodo n produce due rami distinti con successori $n + 1$ ed $n + 2$. Questi sono etichettati da due formule che disgiuntamente sono equivalenti alla formula che etichetta il nodo n . Cioè $v(A_n) = 1$ se e solo se $v(A_{n+1}) = 1$ oppure $v(A_{n+2}) = 1$

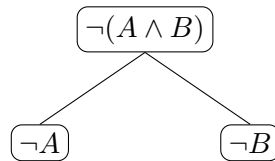
- Regola (\vee)
 Se il nodo n è etichettato con la formula $A \vee B$
 allora i nodi ramificati $n + 1$ e $n + 2$ saranno etichettati con le formule A e B :



- Regola ($\neg\wedge$)

Se il nodo n è etichettato con la formula $\neg(A \wedge B)$,

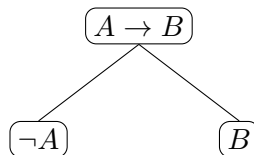
allora i nodi ramificati $n + 1$ e $n + 2$ saranno etichettati con le formule $\neg A$ e $\neg B$:



- Regola (\rightarrow)

Se il nodo n è etichettato con la formula $A \rightarrow B$,

allora i nodi ramificati $n + 1$ e $n + 2$ saranno etichettati con le formule $\neg A$ e B :



Procedura 4: Procedura di decisione della tautologicità con gli alberi di refutazione

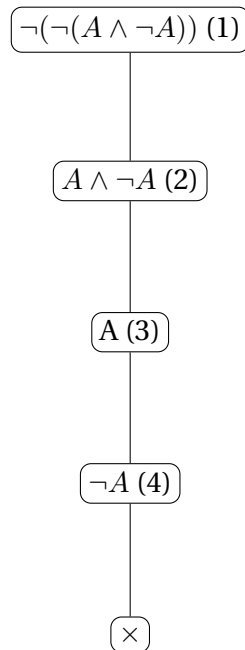
Input: una formula $A \in \mathcal{FL}$.

Output: TAUTOLOGIA oppure NON TAUTOLOGIA.

1. Riscrivi il problema di tautologicità come problema di soddisfacibilità:
 $\neg A$ non è soddisfacibile.
2. Costruisci un *albero di refutazione* \mathcal{R} :
 - (a) Etichetta la (singola) radice con $\neg A$.
 - (b) Applica le regole di costruzione fino a che le formule che etichettano i nodi non ammettono più alcuna applicazione delle regole.
3. Arresto:
 - (a) Se tutti i rami risultano chiusi, allora restituisci TAUTOLOGIA.
 - (b) Se esiste almeno un ramo aperto in cui compaiono, allora restituisci NON TAUTOLOGIA.

Esempio:

Attraverso la costruzione di un albero di refutazione, dimostrare $\models \neg(A \wedge \neg A)$.



1. Etichettiamo la radice con la negazione della formula data: $\neg(\neg(A \wedge \neg A))$.
2. Applichiamo la regola $(\neg\neg)$ alla formula (1). Questo espande il ramo con il nodo etichettato da $A \wedge \neg A$ (2).
3. Applichiamo la regola per la congiunzione (\wedge) alla formula (2). Questo produce i due nodi etichettati da A (3) e $\neg A$ (4) sullo stesso ramo.
4. Il ramo contiene ora A (3) e $\neg A$ (4). Poiché è un insieme non soddisfacibile, il ramo si chiude. (×).

Poiché l'unico ramo si è chiuso, la formula iniziale $\neg(\neg(A \wedge \neg A))$ non è soddisfacibile.

Di conseguenza, $\neg(A \wedge \neg A)$ è una tautologia. ◀

L'esempio appena discusso costituisce un caso abbastanza particolare in cui l'albero di refutazione non contiene mai biforcazioni. Poiché, come imparerete presto facendo pratica, ogni biforcazione può portare alla duplicazione del lavoro, quando costruite gli alberi di refutazione applicate sempre prima tutte le regole non biforcanti applicabili.

Torniamo ora al Problema de [Il cane di Crisippo \(S. Burris\)](#) (si veda pag. 200) con cui abbiamo aperto la Sezione 9.2 e consideriamo la sua soluzione con il metodo degli alberi di refutazione.

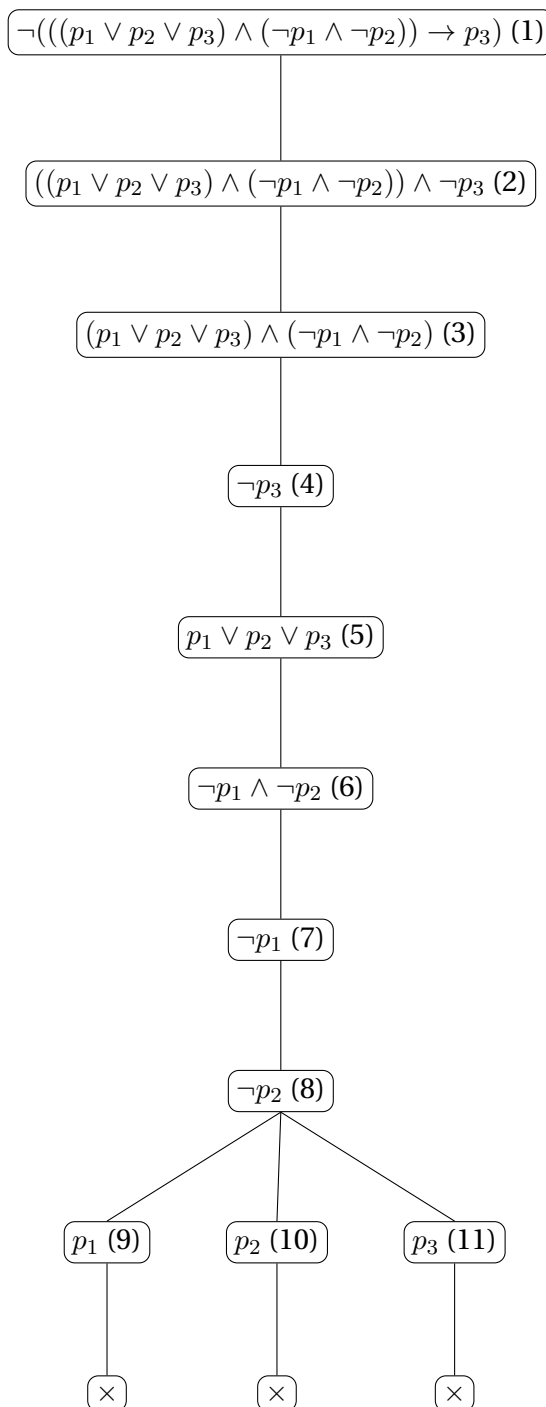
Attraverso la costruzione di un albero di refutazione dobbiamo cioè dimostrare che l'argomento

$$\frac{p_1 \vee p_2 \vee p_3 \quad \neg p_1 \quad \neg p_2}{p_3}$$

è valido.

Per il Teorema 9.2.1 è sufficiente dimostrare che

$$\models ((p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \wedge \neg p_2)) \rightarrow p_3.$$

Svolgimento:

1. Etichettiamo la radice con la negazione della formula data e otteniamo la formula che indicizza il nodo (1).
2. Applichiamo la regola per la negazione dell'implicazione ($\neg \rightarrow$) alla formula (1) e otteniamo la formula che indicizza il nodo (2).
3. Applichiamo la regola per la congiunzione (\wedge) alla formula (2), ottenendo sullo stesso ramo i nodi (3) e (4).
4. Applichiamo ancora la regola (\wedge) alla formula (3), ottenendo sullo stesso ramo i nodi (5) e (6).
5. Applichiamo la regola (\wedge) alla formula (6), ottenendo sullo stesso ramo i nodi $\neg p_1$ (7) e $\neg p_2$ (8).
6. Applichiamo ora la regola per la disgiunzione (\vee) alla formula (5). Il ramo si divide in tre rami, indicizzati rispettivamente con p_1 (9), p_2 (10), e p_3 (11).
7. Nel primo ramo compaiono p_1 (9) e $\neg p_1$ (7), quindi il ramo si chiude (\times).
8. Nel secondo ramo compaiono p_2 (10) e $\neg p_2$ (8), quindi il ramo si chiude (\times).
9. Nel terzo ramo compaiono p_3 (11) e $\neg p_3$ (4), quindi il ramo si chiude (\times).

Poiché tutti i rami si sono chiusi, la formula iniziale (1) non è soddisfacibile.

Di conseguenza,

$$\models (((p_1 \vee p_2 \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \wedge \neg p_2)) \rightarrow p_3).$$

come desiderato. ◀

9.3.3 Alberi di refutazione per la soddisfacibilità

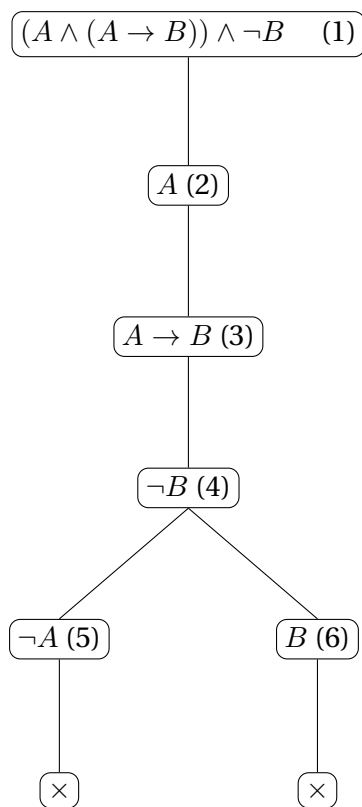
Sfruttando le **Tre formulazioni della validità** (si veda pag. 202) possiamo usare gli alberi di refutazione per decidere problemi di soddisfacibilità. La costruzione dell'albero di refutazione procede esattamente come sopra, a eccezione della radice, che etichetteremo con la *congiunzione* delle formule che compaiono nell'insieme da decidere.

Esempio:

Dimostriamo che l'argomento $\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$ è valido, costruendo un albero di refutazione per dimostrare che l'insieme

$$\{A, A \rightarrow B\} \cup \{\neg B\} = \{A, A \rightarrow B, \neg B\}$$

non è soddisfacibile.



1. Etichettiamo la radice con la congiunzione delle formule nell'insieme dato (1).
2. Applichiamo due volte la regola (\wedge) etichettando i nodi così prodotti con A (2), $A \rightarrow B$ (3) e $\neg B$ (4).
3. Applichiamo la regola per l'implicazione (\rightarrow) alla formula (3). Questo produce una biforcazione in (5) e (6).
4. Nel ramo di (5) compaiono $\neg A$ (5) e A (2) e dunque si chiude (\times).
5. Nel ramo di (6) compaiono B (6) e $\neg B$ (4). Anche in questo caso il ramo si chiude (\times).

Poiché tutti i rami sono chiusi, l'insieme iniziale

$$\{A, A \rightarrow B, \neg B\}$$

non è soddisfacibile.

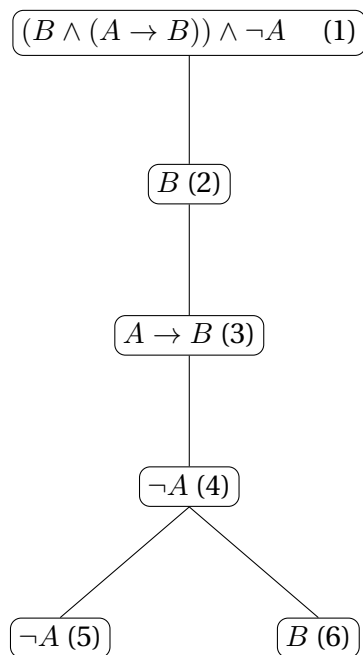


Esempio:

Dimostriamo che l'argomento $\frac{B \quad A \rightarrow B}{A}$ non è valido, costruendo un albero di refutazione per dimostrare che l'insieme

$$\{B, A \rightarrow B\} \cup \{\neg A\} = \{B, A \rightarrow B, \neg A\}$$

è soddisfacibile.



1. Etichettiamo la radice con la congiunzione delle formule nell'insieme dato (1).
2. Applichiamo due volte la regola (\wedge) etichettando i nodi così prodotti con B (2), $A \rightarrow B$ (3) e $\neg A$ (4).
3. Applichiamo la regola per l'implicazione (\rightarrow) alla formula (3). Questo produce una biforcazione in (5) e (6).

Poiché almeno un ramo è aperto, l'insieme iniziale

$$\{B, A \rightarrow B, \neg A\}$$

è soddisfacibile. ◀

L'albero che abbiamo appena costruito permette immediatamente di costruire il controesempio all'argomento

$$\frac{B \quad A \rightarrow B}{A} :$$

basta prendere qualsiasi valutazione che soddisfi $\neg A$ e B . Si tratta (ovviamente) della stessa conclusione a cui siamo arrivati con il metodo delle matrici Booleane nella Sezione 9.1.3.

Esempio: Contrapposizione

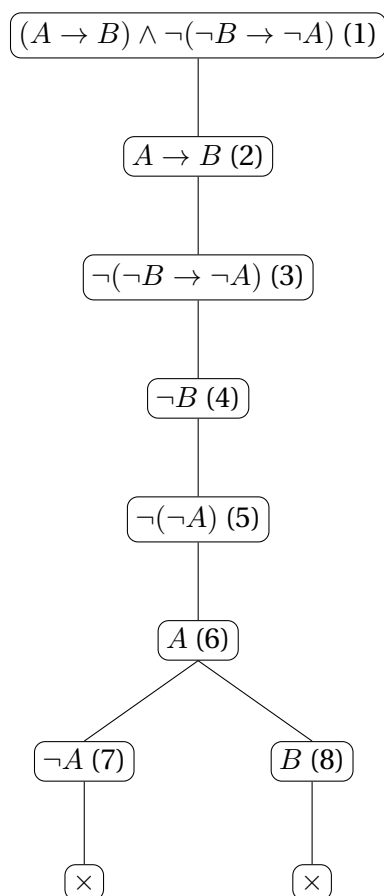
Dimostriamo che l'argomento

$$\frac{A \rightarrow B}{\neg B \rightarrow \neg A}$$

è valido, costruendo un albero di refutazione per dimostrare che l'insieme

$$X = \{A \rightarrow B\} \cup \{\neg(\neg B \rightarrow \neg A)\}$$

non è soddisfacibile.



1. Etichettiamo la radice con la congiunzione delle formule nell'insieme dato (1).
2. Applichiamo la regola (\wedge) ottenendo sullo stesso ramo la formula $A \rightarrow B$ (2) e $\neg(\neg B \rightarrow \neg A)$ (3).
3. Applichiamo la regola per la negazione dell'implicazione ($\neg \rightarrow$) alla formula (3), ottenendo sullo stesso ramo $\neg B$ (4) e $\neg(\neg A)$ (5).
4. Applichiamo la regola della doppia negazione ($\neg\neg$) alla formula (5), ottenendo A (6).
5. Applichiamo la regola per l'implicazione (\rightarrow) alla formula (2), ottenendo una biforcazione nei casi $\neg A$ (7) e B (8).
6. Nel ramo di (7) compaiono $\neg A$ (7) e A (6), quindi il ramo si chiude (\times).
7. Nel ramo di (8) compaiono B (8) e $\neg B$ (4), quindi anche questo ramo si chiude (\times).

Poiché tutti i rami sono chiusi, l'insieme iniziale

$$\{A \rightarrow B, \neg(\neg B \rightarrow \neg A)\}$$

non è soddisfacibile.

Di conseguenza, l'argomento $\frac{A \rightarrow B}{\neg B \rightarrow \neg A}$ è valido.



9.4 Confronto tra matrici Booleane e alberi di refutazione

Problema 3

Dimostrare che l'argomento

$$\frac{A \rightarrow C \quad B \rightarrow C \quad A \vee B}{C}$$

è valido sia con il metodo delle matrici Booleane sia con quello degli alberi di refutazione.

Svolgimento:

Metodo delle matrici Booleane Costruiamo la matrice booleana estesa per il linguaggio proposizionale

$$\mathcal{L}' = \{p, q, r\}, \quad \text{dove identifichiamo } p = A, q = B, r = C.$$

	p	q	r	$p \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$p \vee q$
v_1	1	1	1	1	1	1
v_2	1	1	0	0	0	1
v_3	1	0	1	1	1	1
v_4	1	0	0	0	1	1
v_5	0	1	1	1	1	1
v_6	0	1	0	1	0	1
v_7	0	0	1	1	1	0
v_8	0	0	0	1	1	0

Vogliamo verificare che per ogni valutazione v vale:

$$\text{se } v(p \rightarrow r) = v(q \rightarrow r) = v(p \vee q) = 1, \text{ allora } v(r) = 1.$$

Osserviamo che tutte le righe che soddisfano le tre premesse soddisfano anche r . Dunque,

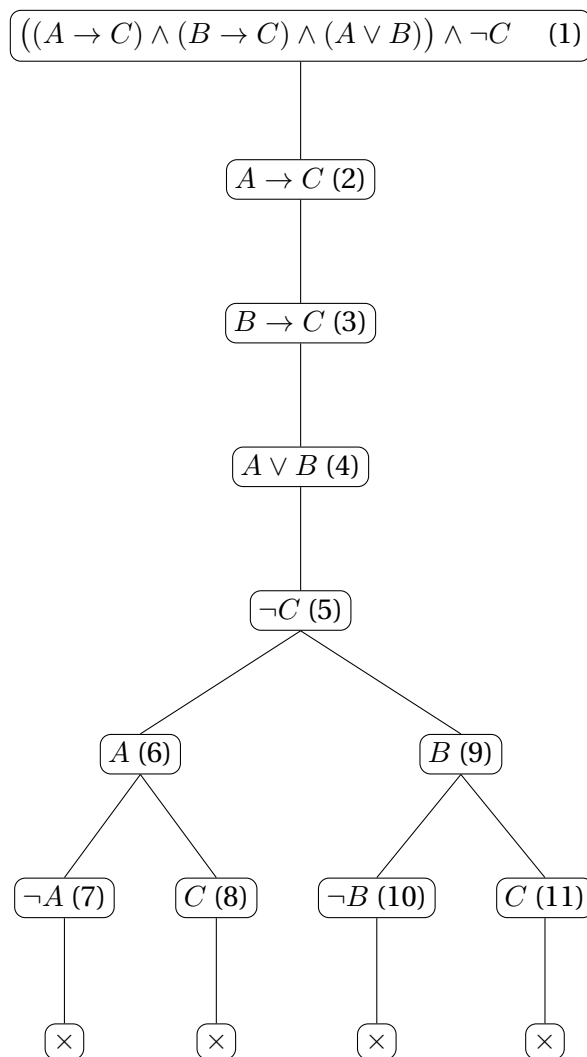
$$\{A \rightarrow C, B \rightarrow C, A \vee B\} \models C.$$

e l'argomento è valido.

Metodo degli alberi di refutazione Dimostriamo ora la validità costruendo un albero di refutazione per mostrare che l'insieme

$$X = \{A \rightarrow C, B \rightarrow C, A \vee B\} \cup \{\neg C\} = \{A \rightarrow C, B \rightarrow C, A \vee B, \neg C\}$$

non è soddisfacibile.



1. Etichettiamo la radice con la congiunzione delle formule nell'insieme dato (1).
2. Applichiamo ripetutamente la regola (\wedge) ottenendo sullo stesso ramo $A \rightarrow C$ (2), $B \rightarrow C$ (3), $A \vee B$ (4) e $\neg C$ (5).
3. Applichiamo la regola per la disgiunzione (\vee) alla formula (4). Questo produce una biforcazione nei casi A (6) e B (9).
4. Nel ramo di A (6) applichiamo la regola per l'implicazione (\rightarrow) alla formula (2), ottenendo una biforcazione in $\neg A$ (7) e C (8).
5. Nel ramo di (7) compaiono $\neg A$ (7) e A (6), quindi il ramo si chiude (\times).
6. Nel ramo di (8) compaiono C (8) e $\neg C$ (5), quindi il ramo si chiude (\times).
7. Nel ramo di B (9) applichiamo la regola per l'implicazione (\rightarrow) alla formula (3), ottenendo una biforcazione in $\neg B$ (10) e C (11).
8. Nel ramo di (10) compaiono $\neg B$ (10) e B (9), quindi il ramo si chiude (\times).
9. Nel ramo di (11) compaiono C (11) e $\neg C$ (5), quindi il ramo si chiude (\times).

Poiché tutti i rami sono chiusi, l'insieme iniziale

$$\{A \rightarrow C, B \rightarrow C, A \vee B, \neg C\}$$

non è soddisfacibile.

Di conseguenza, l'argomento $\frac{A \rightarrow C \quad B \rightarrow C \quad A \vee B}{C}$ è valido. ◀

Se avete già sviluppato un po' di mentalità logica, troverete la domanda seguente piuttosto naturale:

Che rapporto c'è tra i metodi di decisione basati sulle matrici booleane e gli alberi di refutazione?

Oltre a formalizzare il ragionamento, la logica ci insegna anche a gestire le risorse computazionali di cui disponiamo. Nel caso delle matrici Booleane e degli alberi

di refutazione, i due metodi risultano in generale incomparabili dal punto di vista dell'efficienza: una dimostrazione ottenuta con le matrici Booleane non può essere trasformata in una dimostrazione con gli alberi di refutazione senza poter garantire che la lunghezza della dimostrazione resti "comparabile" (e viceversa). Di conseguenza, esistono formule per le quali le matrici Booleane sono significativamente più efficienti degli alberi di refutazione, ed altre per cui accade l'opposto.

In particolare, se una formula è molto lunga ma contiene poche variabili proposizionali, conviene usare le matrici Booleane. Infatti, il numero di righe da controllare dipende solo dal numero n di variabili ed è pari a 2^n , indipendentemente dalla lunghezza della formula. Viceversa, se la formula contiene molte variabili ma ha una struttura relativamente compatta, è più conveniente utilizzare gli alberi di refutazione.

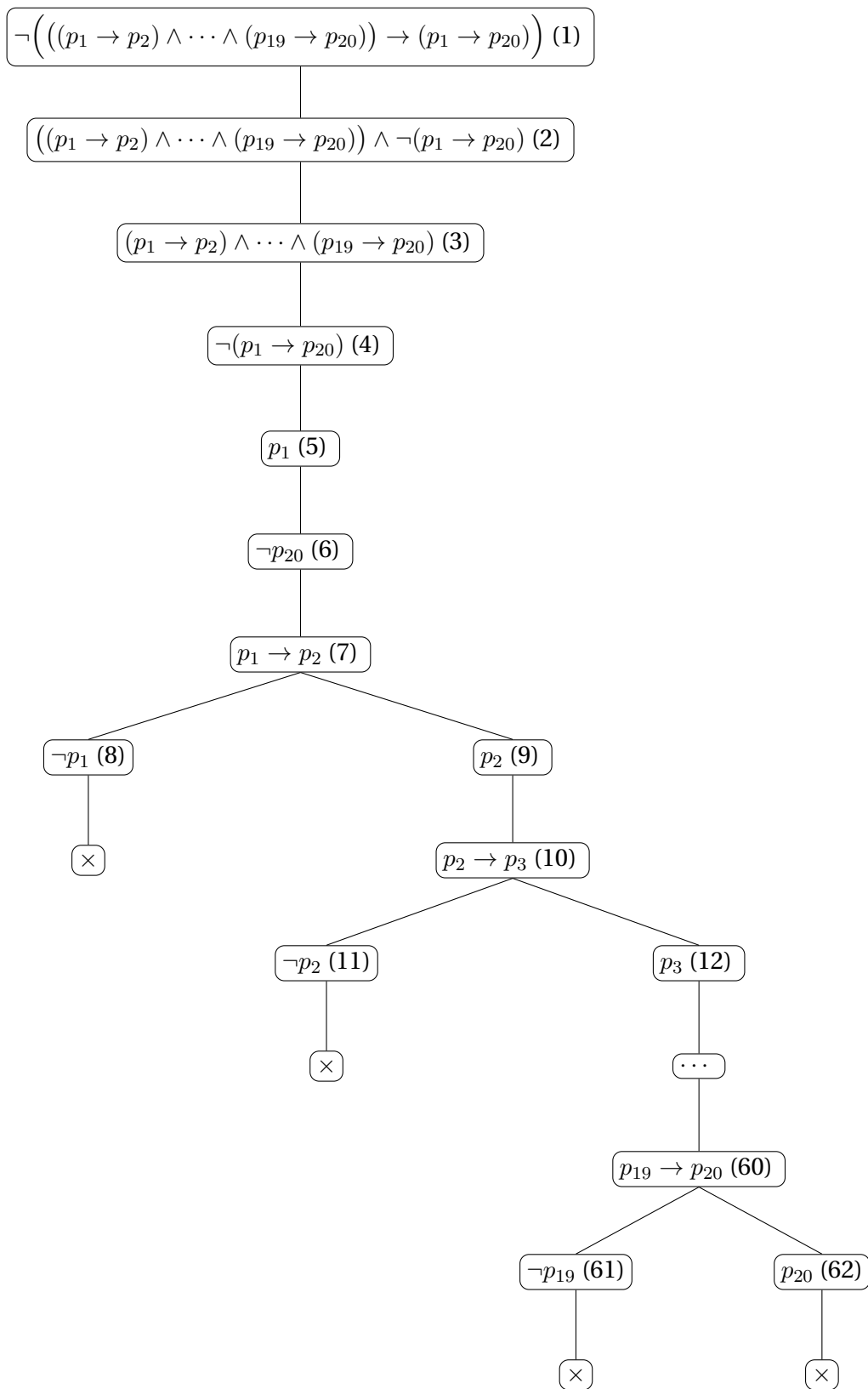
Per illustrare questa differenza, consideriamo la formula

$$((p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge \cdots \wedge (p_{19} \rightarrow p_{20})) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_{20}).$$

Se volessimo dimostrare che la formula è una tautologia mediante le tavole di verità, dovremmo esaminare tutte le $2^{20} = 1\,048\,576$ valutazioni possibili. Utilizzando gli alberi di refutazione, invece, la dimostrazione si chiude dopo solo 62 passi.

Questo esempio mostra in modo concreto come la scelta del metodo possa fare una differenza enorme dal punto di vista computazionale.

C'è però un vantaggio indiscutibile che gli alberi di refutazione hanno rispetto alle matrici Booleane, ed è il fatto che si possono estendere a molte logiche più complicate e interessanti rispetto alla logica proposizionale, tra cui la logica dei predicati.



(1) Alla radice mettiamo la negazione della formula:

$$\neg\left(\left((p_1 \rightarrow p_2) \wedge \dots \wedge (p_{19} \rightarrow p_{20})\right) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_{20})\right).$$

(2) Applichiamo la regola $(\neg \rightarrow)$ a (1) e otteniamo:

$$(p_1 \rightarrow p_2) \wedge \cdots \wedge (p_{19} \rightarrow p_{20}) \quad (3) \quad \text{e} \quad \neg(p_1 \rightarrow p_{20}) \quad (4).$$

(3) Applichiamo ripetutamente (\wedge) a sinistra in (2), ottenendo tutte le implicazioni:

$$p_1 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow p_3, \dots, p_{19} \rightarrow p_{20} \quad \text{e} \quad \neg(p_1 \rightarrow p_{20}).$$

(4) Applichiamo $(\neg \rightarrow)$ a $\neg(p_1 \rightarrow p_{20})$ e otteniamo:

$$p_1 \quad (5) \quad \text{e} \quad \neg p_{20} \quad (6).$$

(7)-(60) Ora applichiamo iterativamente la regola (\rightarrow) alle implicazioni $p_i \rightarrow p_{i+1}$, per $i = 1, \dots, 19$. Ogni volta si crea una biforcazione e da $p_i \rightarrow p_{i+1} (n)$ otteniamo i rami $\neg p_i (n+1)$ e $p_{i+1} (n+2)$:

- il ramo con $\neg p_i$ si chiude, perché sul ramo è già presente p_i ;
- sul ramo con p_{i+1} si prosegue.

(62) Alla fine della catena otteniamo sul ramo aperto p_{20} , che insieme a $\neg p_{20}$ chiude anche l'ultimo ramo.

Poiché tutti i rami sono chiusi, la negazione della formula iniziale non è soddisfacibile, quindi la formula è una tautologia.

9.5 Esercizi

Esercizio 38

Dimostrare che se un insieme X di formule (finito e non vuoto) non è soddisfacibile, allora non lo è alcun suo sovrainsieme Y (cioè con $X \subseteq Y$).

Esercizio 39

Dimostrare che se un insieme X di formule (finito e non vuoto) è soddisfacibile, allora lo sono tutti i suoi sottoinsiemi.

Esercizio 40

Siano $A, B \in \mathcal{FL}$ e X l'insieme

$$X = \{\neg B, A \rightarrow B, A\}.$$

Dimostrare che X non è soddisfacibile.

Esercizio 41

Dimostrare che una formula A è contingente se e solo se la sua matrice Booleana contiene sia 0 sia 1.

Esercizio 42

Spiegare perché la [Procedura di decisione della tautologicità con le matrici Booleane](#) (si veda pag. 195) fornisce un algoritmo di decisione per la tautologicità di una qualsiasi formula proposizionale.

Esercizio 43

Siano $A, B, C \in \mathcal{FL}$. Dimostrare, con opportune matrici Booleane, le seguenti relazioni di conseguenza logica.

(MP) *Modus Ponens*

$$\{A \rightarrow B, A\} \models B.$$

(MT) *Modus Tollens*

$$\{A \rightarrow B, \neg B\} \models \neg A.$$

(SD) *Sillogismo Disgiuntivo*

$$\{A \vee B, \neg A\} \models B.$$

(TRN) *Transitività dell'implicazione*

$$\{A \rightarrow B, B \rightarrow C\} \models A \rightarrow C.$$

Esercizio 44

Siano $A, B \in \mathcal{FL}$. Identificare, con opportune matrici Booleane, i controesempi che rendono le seguenti relazioni di conseguenza logica non valide.

(AC) *Affermazione del Conseguente*

$$\{A \rightarrow B, B\} \not\models A.$$

(NA) *Negazione dell'Antecedente*

$$\{A \rightarrow B, \neg A\} \not\models \neg B.$$

(SYM) *Simmetria dell'implicazione*

$$\{A \rightarrow B\} \not\models B \rightarrow A.$$

Esercizio 45

Dimostra mediante un opportuno albero di refutazione che il seguente argomento è valido

$$\frac{A \rightarrow B, \quad \neg B}{\neg A}$$

Esercizio 46

Dimostra mediante un opportuno albero di refutazione che il seguente argomento non è valido

$$\frac{A \vee B, \quad \neg A}{\neg B}$$

Esercizio 47

Dimostra mediante un opportuno albero di refutazione che il seguente argomento è valido

$$\frac{A \rightarrow B, \quad B \rightarrow C}{A \rightarrow C}$$

Esercizio 48

Dimostra mediante un opportuno albero di refutazione che il seguente argomento non è valido

$$\frac{A \rightarrow B, \quad \neg A}{\neg B}$$

Esercizio 49

Dimostra mediante un opportuno albero di refutazione che il seguente argomento non è valido

$$\frac{A \rightarrow B}{B \rightarrow A}$$

Esercizio 50

Dimostra che il seguente argomento è valido

$$\frac{\neg A \rightarrow (B \wedge \neg B)}{A}$$

sia con il metodo delle matrici Booleane sia con quello degli alberi di refutazione.

Esercizio 51

Dimostra che il seguente argomento è valido

$$\frac{\neg A \quad B \wedge \neg B}{A}$$

sia con il metodo delle matrici Booleane sia con quello degli alberi di refutazione.

Confronta la soluzione con quella dell'Esercizio 50.

10 Dal linguaggio comune al linguaggio proposizionale

Il Capitolo 9 vi fornisce una serie di procedure per decidere in modo algoritmico i problemi elementari della logica proposizionale. Tra questi c'è la validità degli argomenti proposizionali.

I problemi di ragionamento che vi interessano però non arrivano già formalizzati. Esattamente come i quesiti discussi nella Parte I, i problemi di ragionamento si presentano tipicamente nel linguaggio comune. Questo è vero anche nel ragionamento scientifico. Si pone quindi il problema metodologico di capire sotto quali condizioni gli strumenti della logica proposizionale sono applicabili fuori dal contesto artificioso dei “quesiti”.

10.1 L'ambiguità del linguaggio comune	222
10.2 Formalizzazione del linguaggio comune	224
10.3 Formalizzazione degli argomenti matematici	233
10.4 Argomenti rilevanti per la decisione	234
10.5 Esercizi	238
A.1 Parte I	243
A.2 Parte II	245

10.1 L'ambiguità del linguaggio comune

Il linguaggio comune è intrinsecamente ambiguo. Se non lo fosse, non avremmo poesia, umorismo e probabilmente nemmeno la creatività matematica, come ci ricorda G. Lolli nel suo *Ambiguità*, pubblicato da Einaudi nel 2017.

Esempio:

Identifichiamo le ambiguità presenti nelle frasi seguenti:

1. Ho chiesto aiuto alla signora con il bastone.
2. Dal molo ho visto una statua con il cannocchiale.
3. n è primo e pari oppure dispari.

La prima frase costituisce un esempio di *ambiguità semantica*. Si può infatti intendere come

- La signora a cui ho chiesto aiuto ha il bastone;
- Ho usato il bastone per chiedere aiuto alla signora;
- Ho chiesto aiuto alla signora riguardo al bastone.

Così anche la seconda frase:

- Ho usato il cannocchiale per vedere una statua dal molo;
- Ho visto dal molo una statua (di figura) che ha un cannocchiale.

Nella terza asserzione l'ambiguità è di tipo sintattico. C'è infatti differenza tra:

- (n è primo e pari) oppure dispari;
- n è primo e (pari oppure dispari).

Nel primo caso l'asserzione è vera quando $n = 2$ o n è dispari, mentre la seconda è vera quando n è primo. ◀

La natura ricorsiva della sintassi logica (che abbiamo discusso solo nel caso proposizionale) ci permette di rimuovere le ambiguità sintattiche, ma non quelle semantiche. Dunque non possiamo aspettarci che data una proposizione espressa nel linguaggio comune esista un unico elemento di \mathcal{FL} che la formalizzi. A maggior ragione, quindi, non esiste alcuna garanzia che un argomento espresso in linguaggio comune sia formalizzabile univocamente. Quindi, pur disponendo di una [Procedura di decisione della conseguenza logica con le matrici Booleane](#) (si veda pag. 198), non ci possiamo aspettare che, dato un argomento espresso in italiano, si possa dire senza esitazione se è valido o meno.

Esempio:

Proviamo a esprimere in logica proposizionale un'asserzione che si legge in un regolamento didattico universitario:

“Ai fini del superamento dell'esame è necessario conseguire il punteggio minimo di 18 punti”.

Abbreviando con

S : “si supera l'esame”

D : “punteggio conseguito almeno 18”.

La formalizzazione immediata è $S \rightarrow D$ poiché esprime direttamente una delle **Espressioni che identificano l'implicazione** (si veda pag. 39) in termini di condizioni necessarie.

Considerate ora la formalizzazione $D \rightarrow S$. Notate (dimostrandolo!) innanzitutto che non si tratta di una formalizzazione equivalente. Eppure anche questa sembra una formalizzazione molto ragionevole visto che superare 18 è presumibilmente anche una condizione sufficiente al superamento dell'esame.

Dunque la formalizzazione più adeguata è

$$(S \rightarrow D) \wedge (D \rightarrow S).$$

L'esempio mette in luce l'ambiguità dell'uso delle condizioni necessarie/sufficienti nel linguaggio naturale. In alcuni casi si tratta di ambiguità relativamente innocua. In altri casi, può avere conseguenze più negative. Abbiamo quindi bisogno di fare qualche considerazione metodologica.

Se avete un interesse esclusivamente formale per la logica, per esempio perché vi interessa studiare la complessità degli algoritmi che permettono di decidere le tautologie proposizionali, allora le questioni metodologiche relative alla formalizzazione non vi preoccuperanno più di tanto.

Se, viceversa, guardate alla logica come a uno strumento applicabile a problemi formulati nel “concreto” e quindi nel linguaggio comune, dovrete affrontare un problema metodologico tutt'altro che banale: mappare in un metodo algoritmico qualcosa di intrinsecamente ambiguo. La vostra capacità di utilizzare proficuamente gli strumenti della logica nel ragionamento quotidiano e scientifico dipenderà in larga parte dalla vostra comprensione di questa tensione metodologica.

10.2 Formalizzazione del linguaggio comune

Per rispondere ai quesiti della Parte I abbiamo fatto ampio uso di quelle che abbiamo chiamato *abbreviazioni*. Si tratta di una controparte informale del concetto che ora ci interessa discutere in modo più rigoroso.

Terminologia e Notazione: Formalizzazione

Con **formalizzazione** si intende la traduzione dal linguaggio comune (italiano, inglese, francese, eccetera) al linguaggio logico. ◀

Abbiamo già notato che poiché il linguaggio “di partenza” – quello comune – è caratterizzato da notevole ambiguità, mentre quello “di arrivo” ne è privo, la formalizzazione non è determinata univocamente. Fissiamo la cosa in modo più enfatico:

Fatto:

Non esiste un algoritmo per la formalizzazione. ◀

È comunque possibile seguire una procedura che in qualche modo assomiglia a un algoritmo, ma che in alcuni passaggi vi chiede di compiere delle scelte che dipendono dalla vostra comprensione delle proposizioni in oggetto. Di conseguenza non esiste una formalizzazione oggettivamente corretta o sbagliata. Esistono piuttosto formalizzazioni adeguate o non adeguate rispetto al significato dei connettivi proposizionali.

Da ciò segue che una separazione rigida tra sintassi e semantica è inopportuna: i connettivi tra cui scegliere per la formalizzazione fanno parte della sintassi, ma ciò che distingue una scelta adeguata da una che non lo è, dipende dalla semantica. E visto che la sintassi intesa in senso stretto è fatta di segni, è in questo aspetto della semantica che la logica si collega con il mondo.

La procedura per la formalizzazione proposizionale che segue contiene due componenti:

1. Identificazione del linguaggio proposizionale (**IP**)
2. Inserimento appropriato dei connettivi proposizionali (**AP**)

Procedura 5: Formalizzazione Proposizionale

- (IP.1) Leggi attentamente l'espressione;
- (IP.2) Identifica le unità linguistiche "più piccole" che possono essere considerate formule e che non contengono connettivi e assegna loro una variabile proposizionale (una per ogni espressione identificata);
- (IP.3) Introduci i connettivi secondo i criteri di adeguatezza proposizionale:
- (AP.1) Costruisci una matrice Booleana con i connettivi che trovi plausibili alla luce della tua comprensione (IP.1);
 - (AP.2) Valuta la formula con una matrice Booleana e confrontala con le condizioni di verità dell'espressione da formalizzare.
- (IP.4) Se non è possibile identificare alcun connettivo adeguato per la formalizzazione, allora formalizza l'espressione iniziale mediante una variabile proposizionale.

Illustriamo la procedura attraverso la formalizzazione di una frase pronunciata in una conferenza stampa di Mario Draghi (allora Presidente del Consiglio) il 22 luglio 2021.

Esempio:

Formalizzare in logica proposizionale:

Non ti vaccini, ti ammali, muori. Oppure fai morire.

Seguiamo i passi della Procedura 5.

(IP.1)

Il significato inteso (probabilmente) è quello per cui la vaccinazione è una misura utile a ridurre le probabilità di infettarsi e quindi contagiare altre persone con esito clinico potenzialmente infausto per sé o altri.

(IP.2)

Identifichiamo il linguaggio con $\mathcal{L} = \{A, F, M, V\}$, dove

- A : ti ammali;
- V : ti vaccini;
- M : muori;
- F : fai morire.

(IP.3/AP.1)

Alla luce di (IP.1) sembrano esserci due modi plausibili di introdurre i connettivi proposizionali:

$$(\neg V \rightarrow (A \rightarrow (M \vee F))) \quad (10.1)$$

e

$$(\neg V \rightarrow A) \rightarrow (M \vee F). \quad (10.2)$$

(IP.3/AP.2)

Notiamo che (10.1) e (10.2) non sono logicamente equivalenti mentre (10.1) è equivalente a (10.3):

$$(\neg V \wedge A) \rightarrow (M \vee F) \quad (10.3)$$

	V	A	M	F	$\neg V$	$M \vee F$	$A \rightarrow (M \vee F)$	$\neg V \rightarrow (A \rightarrow (M \vee F))$	$\neg V \rightarrow A$	$(\neg V \rightarrow A) \rightarrow (M \vee F)$	$\neg V \wedge A$	$(\neg V \wedge A) \rightarrow (M \vee F)$
v_1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1
v_2	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1
v_3	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1
v_4	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1
v_5	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1
v_6	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1
v_7	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1
v_8	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1
v_9	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
v_{10}	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
v_{11}	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
v_{12}	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0
v_{13}	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1
v_{14}	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1
v_{15}	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1
v_{16}	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1

Quale scegliere? (10.3) ci aiuta a rappresentare più fedelmente di (10.2) il significato che abbiamo estratto al passaggio (IP.1), e dunque è una formalizzazione adeguata secondo i criteri della Procedura 5.

Qualche osservazione sui passaggi della procedura.

(IP.1) può sembrare banale, e per questo è spesso sottostimato. Una comprensione sufficientemente articolata del contesto dell'espressione originale è necessaria a orientare le scelte successive. Persone diverse, o le stesse persone in momenti diversi, possono interpretare la frase in modi diversi. Nel linguaggio comune, così come in quello scientifico, è il contesto a dare significato alle parole.

(IP.2) è il passaggio metodologicamente meno problematico. Bisogna comunque prestare attenzione ai connettivi non espressi esplicitamente nella proposizione da formalizzare, come nel caso discusso nell'Esempio.

(IP.3/AP.1) dipende in modo centrale da (IP.1). E poiché l'esito di (IP.1) può essere

largamente soggettivo, così sarà anche per (IP3/AP.1).

(IP3/AP.2) è un passaggio che, fatte salve le dipendenze già individuate nei passi precedenti, può essere svolto mediante procedure euristiche, che esamineremo ora per ciascun connettivo.

Infine, avrete notato che vi mettiamo come soggetti attivi di questa procedura: la qualità del suo esito dipende da voi.

10.2.1 Negazione

La negazione proposizionale è senza dubbio il connettivo che pone meno difficoltà metodologiche. Negare una proposizione vera equivale ad affermare una proposizione falsa, e viceversa, negare una proposizione vera equivale a affermarne una falsa.

Raramente emergono problemi nella formalizzazione della negazione se l'ambito di ragionamento è quello matematico, dove le proposizioni sono o vere o false (ma non entrambe).

Nel linguaggio comune questo non avviene quasi mai.

Esempio:

Consideriamo la proposizione

(1) Se Jim è felice, allora Jules è triste, e se Jules è triste, allora Jim è triste.

Sono possibili almeno due modi di seguire la Procedura 5.

Formalizzazione 1 Al passo (IP.2) identifichiamo il linguaggio come segue:

p : "Jim è felice";

q : "Jules è felice".

Introducendo al passo (IP.3) la negazione nel modo ovvio otteniamo:

$$(p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg q \rightarrow \neg p). \quad (10.4)$$

Valutandola notiamo che la (10.4) è logicamente equivalente ad asserire che Jules è felice, e questo sembra confliggere con il significato in italiano della proposizione iniziale (certamente non molto interessante):

	p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow \neg p$	$p \rightarrow \neg q$	$\neg q \rightarrow \neg p$	$(p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg q \rightarrow \neg p)$
v_1	1	1	1	0	0	1	0
v_2	1	0	0	1	1	0	0
v_3	0	1	1	1	1	1	1
v_4	0	0	1	1	1	1	1

Ripercorrendo a ritroso la procedura, notiamo che al passaggio (IP.3) abbiamo formalizzato “Jim è triste” con $\neg p$ (e lo stesso per Jules). Assumiamo cioè che essere tristi sia la negazione (in senso Booleano) di essere felici e quindi non è necessario introdurre una nuova variabile proposizionale per “Jim/Jules è triste”. Trattiamo quindi “essere felici” ed “essere tristi” come stati *binari e mutuamente esclusivi*.

Tuttavia, una semplice riflessione è sufficiente a mostrare che le seguenti situazioni sono estremamente comuni:

1. Si può *non essere felici* senza per questo essere tristi. Lavorare intensamente, correre, o essere concentrati su un obiettivo difficilmente sono associati alla felicità, ma ciò non implica affatto che siano associati alla tristezza.
2. Una certa situazione (ad esempio essere ammessi a un prestigioso dottorato in un altro continente) può rendere una persona felice e al tempo stesso triste: la felicità è legata al successo ottenuto; la tristezza può invece dipendere dal dover lasciare amici, affetti, luoghi familiari, e così via.

Queste semplici osservazioni mostrano come la scelta fatta al passo (IP.2) possa snaturare il significato inteso della proposizione da formalizzare. Questo suggerisce una formalizzazione alternativa che ora discutiamo.

Formalizzazione 2 Al passo (IP.2) procediamo considerando tutte le proposizioni come distinte, e quindi identifichiamo il linguaggio come segue:

p : “Jim è felice”;

q : “Jim è triste”;

r : “Jules è triste”.

Non ci sono connettivi da introdurre con questa identificazione del linguaggio, e quindi la formalizzazione diventa:

$$(p \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow q). \quad (10.5)$$

La matrice Booleana di (10.5):

	p	q	r	$p \rightarrow r$	$r \rightarrow q$	$(p \rightarrow r) \wedge (r \rightarrow q)$
v_1	1	1	1	1	1	1
v_2	1	1	0	0	1	0
v_3	1	0	1	1	0	0
v_4	1	0	0	0	1	0
v_5	0	1	1	1	1	1
v_6	0	1	0	1	1	1
v_7	0	0	1	1	0	0
v_8	0	0	0	1	1	1

Confrontiamo ora le due formalizzazioni. La prima presenta l'inconveniente di vincolare "essere felice" ed "essere triste" in modo logicamente troppo stringente, come abbiamo brevemente osservato. La seconda formalizzazione presenta l'inconveniente opposto: formalizzandole con variabili proposizionali distinte p e q si perde qualsiasi relazione logica tra "Jim è felice" e "Jules è triste". ◀

Data la natura artificiale della proposizione da formalizzare nell'esempio precedente, il fatto che nessuna delle due formalizzazioni discusse sia esente da limitazioni non desta troppe preoccupazioni. Ma il punto centrale rimane: quando formalizziamo il linguaggio comune, non possiamo aspettarci di avere una traduzione perfetta. Dobbiamo piuttosto scegliere quella che ci sembra più adeguata alla luce della nostra comprensione del significato della proposizione stessa.

Chiudiamo la discussione sulla formalizzazione della negazione ricordando che negare una proposizione non significa asserire il suo **opposto**.

Esempio:

Consideriamo la proposizione:

Thelonious Monk è il mio pianista preferito

La sua negazione, ragionevolmente, è data da

Thelonious Monk non è il mio pianista preferito

oppure, equivalentemente,

Non è vero che Thelonious Monk è il mio pianista preferito.

La proposizione che esprime la preferenza opposta è (qualcosa come):

Thelonious Monk è il pianista che mi piace meno.

Molta dell'aggressività tipica delle interazioni mediate dalle piattaforme di *social networking* sembra essere basata sull'asserzione dell'opposto, e non sulla negazione, come manifestazione di disaccordo. ▶

10.2.2 Congiunzione

Abbiamo osservato nella Sezione 8.2.2 che le condizioni semantiche della congiunzione Booleana sono molto naturali nel contesto matematico.

Nel linguaggio comune, invece, le cose stanno diversamente: la congiunzione assume spesso una connotazione sia temporale sia causale.

Esempio:

Confrontiamo le proposizioni seguenti:

(T.1) Elon Musk entra in politica e Tesla crolla in borsa;

(T.2) Tesla crolla in borsa ed Elon Musk entra in politica.

Seguendo la Procedura 5 identifichiamo:

p : “Elon Musk entra in politica”;

q : “Tesla crolla in borsa”;

da cui otteniamo

- $p \wedge q$ come formalizzazione di (T.1) e
- $q \wedge p$ come formalizzazione di (T.2).

Analizzando però il significato delle proposizioni da formalizzare, è chiaro che T1 e T2 veicolino significati tra loro diversi. In entrambi i casi il secondo congiunto è infatti inteso come *effetto* del primo, ma questa accezione è chiaramente incompatibile con la commutatività di \wedge .

Questo dà un valore euristico al seguente test per la valutazione del passo (IP3/AP1) della Procedura 5 nel caso in cui il connettivo potenzialmente adeguato sia la congiunzione. ◀

Procedura 6: Test di commutatività per \wedge

Se l'espressione da formalizzare cambia di significato secondo (IP.1) commutando i congiunti, allora \wedge non è il connettivo adeguato per la formalizzazione.

10.2.3 Se ... allora**Problema 4**

Formalizzare in logica proposizionale:

Se piove, allora prendo l'ombrello.

Se avete sfogliato un'introduzione alla logica, c'è una probabilità tutt'altro che trascurabile che abbiate trovato la proposizione di questo esercizio come illustrazione dell'implicazione Booleana. Se non vi è capitato, avete avuto fortuna. Perché si tratta di un pessimo esempio.

Svolgimento:

Supponiamo, per amor di argomento, di formalizzarla nel modo scontato: $P \rightarrow O$. Stiamo dicendo che il verificarsi della condizione di pioggia è sufficiente affinché io prenda l'ombrello. Ma è facile vedere come invalidare questa condizione: basta che, al momento di uscire, piova e che io non abbia un ombrello a disposizione. Si potrebbe rendere tutto meno ambiguo precisando che la condizione è sufficiente soltanto a patto che (!) io abbia la disponibilità di un ombrello, e così via. Questo però non risolve il problema. Per vederlo basta considerare l'implicazione contronominale $\neg O \rightarrow \neg P$. Se la prima formalizzazione fosse corretta, deve esserlo anche questa, poiché in logica proposizionale è equivalente. Ma questa suona decisamente peggio, perché suggerisce che la situazione in cui non prendo l'ombrello è sufficiente a non far piovere. C'è senz'altro qualcosa che non torna. Magari quello che si vuol dire è che il fatto che io non prenda l'ombrello è sufficiente a garantire che la mia osservazione relativa al meteo ha riportato esito negativo relativamente alla pioggia. Avrei però potuto aver bisogno di uscire di fretta, e magari sono senza ombrello anche in una situazione di pioggia semplicemente perché dovevo uscire e non avevo l'ombrello. E non avere l'ombrello è certamente un ottimo motivo per non prenderlo.

Dunque, $P \rightarrow O$ non è una formalizzazione adeguata. ◀

Procedura 7: Test contronominale per \rightarrow

Dopo aver formalizzato un'espressione in linguaggio naturale con l'implicazione Booleana, fate un **test contronominale**. Nel caso in cui questo fallisca, concludete che \rightarrow non è una formalizzazione adeguata.

Si potrebbe osservare che la proposizione del Problema 4 riguarda un mio comportamento *tipico*: anche se sono possibili eccezioni, normalmente se piove, prendo l'ombrello. Probabilmente si tratta della cosa più vicina al significato della proposizione, ma questo non è il significato dell' **Implicazione**.

10.2.4 A meno che

Esempio:

Consideriamo la formalizzazione del seguente consiglio pratico:

A meno che tu non voglia correre il rischio di ripetere l'esame,
è meglio che inizi a studiare seriamente.

Il passo (IP.1) non ci lascia molta scelta: studiare seriamente è una condizione necessaria per superare l'esame. Dunque, *se non studi seriamente, allora* andrai incontro al rischio di bocciatura.

Identifichiamo, come richiesto da (IP.2), le variabili proposizionali come segue:

p : “vuoi correre il rischio di ripetere l’esame”

q : “inizi a studiare seriamente”.

Introduciamo quindi i connettivi:

$$\neg q \rightarrow p. \quad (10.6)$$

Il test della contrapposizione ha esito ragionevolmente positivo visto che $\neg p \rightarrow q$ non altera il significato estratto al passo (IP.1) “iniziare a studiare seriamente è una condizione necessaria per non correre il rischio di ripetere l’esame”.

Notate che la formula (10.6) è logicamente equivalente a

$$q \vee p,$$

che quindi è anch’essa adeguata. 

Esiste tuttavia un significato più forte del connettivo linguistico “a meno che”, che emerge nel contesto del prossimo esempio.

Esempio:

Consideriamo la proposizione:

Aperto 24 ore a meno che sia domenica.

Nel passo (IP.1) è ragionevole interpretare la circostanza secondo cui è domenica come un’eccezione al fatto che l’attività sia aperta 24 ore.

Identifichiamo il linguaggio come segue

p : “Aperto 24 ore”;

q : “è domenica”.

Dunque (IP.1) ci dice che valgono entrambe le seguenti condizioni:


- se p , allora $\neg q$;
- se $\neg q$, allora p .

Quindi la proposizione iniziale è formalizzata da

$$(p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg q \rightarrow p)$$

che, potete verificare facilmente, è equivalente a

$$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q),$$

cioè alla *disgiunzione esclusiva*. 

10.3 Formalizzazione degli argomenti matematici

Problema 5

Formalizzare in logica proposizionale:

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) , allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Svolgimento:

Applicando la procedura di **Formalizzazione Proposizionale** si identifica innanzitutto $\mathcal{L} = \{p, q, r\}$ con la seguente interpretazione:

p : f è continua in $[a, b]$

q : f è derivabile in (a, b)

r : $\exists c \in (a, b)$ tale che $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

La formalizzazione richiesta è dunque

$$(p \wedge q) \rightarrow r.$$

Il Problema 5 mette in evidenza un limite importante della Procedura 5, anche in ambito matematico. Si tratta infatti di una procedura adeguata al fine di distinguere le premesse e la conclusione del *Teorema del valor medio*, ma comporta una notevole perdita di informazione. Si perde di vista, in particolare, il fatto che premesse e conclusione parlano della *stessa* funzione.

Le cose migliorano se introduciamo la *sintassi del prim'ordine* (che non abbiamo discusso dal punto di vista logico in questo manuale):

$$\forall f \forall a \forall b \left(a < b \wedge C(f, [a, b]) \wedge D(f, (a, b)) \rightarrow \exists c \left(a < c < b \wedge f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) \right)$$

Dove:

- $a < b$ (ecc.) è la relazione d'ordine usuale su \mathbb{R}
- $C(f, [a, b])$: è il predicato che esprime f è continua su $[a, b]$
- $D(f, (a, b))$: è il predicato che esprime f è derivabile su (a, b)
- $f'(c)$: è la funzione derivata di f nel punto c

Ma c'è ancora molto che diamo per scontato, per esempio le definizioni di:

1. continuità

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} (|x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

2. derivabilità

$$\exists l \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\} \left(|x - x_0| < \delta \rightarrow \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - l \right| < \varepsilon \right).$$

Il punto di questa discussione è molto semplice: la natura del problema di ragionamento che ci interessa determina la scelta di uno strumento logico adatto. Nel caso del ragionamento matematico c'è un'aspettativa ragionevole di trovare lo strumento adatto. Fuori dal contesto della dimostrazione matematica le cose si complicano notevolmente. Dobbiamo lasciare per un'altra occasione la discussione dettagliata di queste complicazioni, e delle logiche cosiddette *non-classiche* a cui danno luogo.

10.4 Argomenti rilevanti per la decisione

Natasha, amare è soffrire. Se non si vuol soffrire, non si deve amare. Però allora si soffre di non amare. Pertanto amare è soffrire, non amare è soffrire, e soffrire è soffrire. Essere felice è amare: allora essere felice è soffrire. Ma soffrire ci rende infelici.

Pertanto per essere infelici si deve amare. O amare e soffrire. O soffrire per troppa felicità.

Woody Allen, *Amore e guerra*.

Fissiamo \mathcal{L} finito, come al solito. Abbiamo già osservato diverse volte che le matrici booleane sono in corrispondenza con l'insieme \mathbb{V} . Questo dà una lettura naturale delle righe delle matrici booleane come una distribuzione esaustiva dei valori di verità agli elementi di \mathcal{L} . Ora, dovrete ricordare che la definizione di \models quantifica su tutte le valutazioni su \mathcal{L} . Ma in molte situazioni *possediamo una qualche conoscenza o informazione fattuale* al di là del fatto puramente logico che i valori di verità sono distribuiti come dice la matrice booleana. Questa sezione sviluppa un po' più a fondo questa idea.

Definizione 10.4.1 (Argomento Rilevante per la decisione)

Si dice che un argomento proposizionale è *rilevante per la decisione in un dato contesto* se è valido e tutte le sue premesse sono soddisfatte.

Terminologia e Notazione: Rilevanza per la decisione

La rilevanza per la decisione non è un requisito *formale*. Richiede piuttosto che possediamo dati/informazioni/evidenze/conoscenze/ecc. riguardo al problema che stiamo modellando come un argomento proposizionale. Questa informazione è precisamente ciò che ci permette di decidere se le premesse sono tutte soddisfatte e, per questo stesso fatto, *non* è un'informazione che si può ottenere per mezzo del ragionamento logico. ◀

Esempio: Argomento al bar

Supponete di sentire il seguente argomento durante il pranzo:

L'AC Milan vincerà il titolo di Serie A di quest'anno, oppure lo vincerà l'Inter. L'AC Milan, tuttavia, non vincerà il titolo. Quindi, lo vincerà l'Inter.

Vedete alcuni dei vostri amici annuire intorno al tavolo, eppure trovate la cosa un po' sospetta, così decidete di usare la [Procedura di decisione della conseguenza logica con le matrici Booleane](#) (si veda pag. 198) per saperne di più. Ecco cosa fate.

Iniziate fissando il linguaggio proposizionale rilevante; in lettere auto-esplicative potrebbe essere $\{M, I\}$, poiché, dopo un'attenta ispezione, vi rendete conto che ci sono solo due formule elementari coinvolte nell'argomento. Poi siete pronti a visualizzare l'argomento, in una forma di questo tipo:

$$\frac{M \vee I, \neg M}{I} \quad (10.7)$$

Ora siete pronti ad applicare la procedura di decisione per dare una risposta definitiva ai vostri dubbi, cioè verificate se

$$\{M \vee I, \neg M\} \models I.$$

Decidete di adattare al problema il Teorema 9.2.1, quindi *supponete di no*. Allora $\exists v \in \mathbb{V}$ tale che $v(M \vee I) = v(\neg M) = 1$ ma $v(I) = 0$. Per una semplice applicazione delle condizioni Tarskiane a quest'ultimo termine, avete che $\exists v \in \mathbb{V}$ tale che $v(M \vee I) = v(\neg M) = v(\neg I) = 1$. Ma questo contraddice le condizioni Tarskiane, poiché $v(M \vee I) = v(\neg M) = 1$ impongono $v(I) = 1$ e quindi $v(\neg I) = 0$. In altre parole, l'ipotesi che

$$\{M \vee I, \neg M\} \cup \{\neg I\} \text{ sia soddisfacibile}$$

contraddice le condizioni di [Composizionalità della semantica proposizionale](#) (si veda pag. 163) e quindi deve essere respinta, dando

$$\{M \vee I, \neg M\} \models I.$$

Tornate al vostro tavolo e vi congratulate con coloro che annuivano di fronte all'argomento di cui sopra, perché avete una prova che è effettivamente valido. *Ma aspettate un minuto!* – dice un amico – *lo avete dimostrato per assurdo. Se volete davvero persuaderci, dovete dimostrare che il vostro metodo di dimostrazione è effettivamente valido. Ottima osservazione!* Pensate mentre vi rimboccate le maniche e tornate al lavoro. Ecco come ragionate. Nella sua resa più semplice, una dimostrazione per assurdo è un argomento che stabilisce che una certa formula (diciamo A) è vera perché la supposizione che sia falsa porta a un insieme non soddisfacibile. Questo è sufficiente per guidarvi nella formulazione dell'argomento per assurdo come segue. Per tutte le coppie di formule $A, B \in \mathcal{FL}$:

$$\frac{\neg A \rightarrow (B \wedge \neg B)}{A} \quad (10.8)$$

Naturalmente non c'è bisogno di essere specifici sulla contraddizione – sono tutte logicamente equivalenti! Questa volta, ovviamente, preferireste non dimostrare che l'argomento è corretto per assurdo. Invece osservate che $v(B \wedge \neg B) = 0, \forall v \in \mathbb{V}$. Quindi le condizioni di **Composizionalità della semantica proposizionale** vi costringono ad avere $v(\neg A) = 0$ affinché la premessa dell'argomento sia soddisfatta, cioè $v(A) = 1$, come richiesto.

Quindi l'argomento (10.8) – che avete usato per stabilire che l'argomento (10.7) è valido – è esso stesso valido. E lo è, in definitiva, a causa della **Composizionalità della semantica proposizionale**, cioè l'estensione unica a tutto \mathcal{FL} delle matrici Booleane che definiscono i connettivi. Ora riguardate la vostra prova della validità di (10.7) e dite: *Uff, che lavoraccio per la semplice osservazione che condizioni di Composizionalità della semantica proposizionale ti costringono a considerare vero almeno uno dei disgiunti di una disgiunzione vera!* Avete naturalmente ragione a pensarlo. Ma nel frattempo avete imparato un metodo molto flessibile e robusto per verificare gli argomenti. ◀

Il fatto che la validità degli argomenti proposizionali sia decidibile (con le matrici Booleane o con gli alberi di refutazione) ha due importanti conseguenze che ora illustriamo brevemente nel resto di questa Sezione. In particolare, cominceremo facendo un'osservazione che vi permetterà di capire il punto della vostra collega piuttosto intelligente che non è ancora persuasa dal vostro argomento secondo cui l'Inter vincerà il titolo di Serie A. Lei vi sta infatti facendo notare che il vostro argomento per la validità di (10.7) è piuttosto *debole* – soddisfa la definizione di validità del Corso di Logica, ma difficilmente è un argomento che convincerebbe i bookmaker. Beh, lei ha *decisamente* ragione.

Ciò a cui la vostra collega intelligente sta giustamente obiettando è la verità della premessa $M \vee I$. Non abbiamo (probabilmente!) alcuna ragione di pensare, credere e, cosa più importante, *agire* come se fosse vera per la Serie A di quest'anno. In altre parole, la conoscenza della stagione calcistica è cruciale per determinare se sia ragionevole o meno assumere che le premesse dell'argomento siano vere. Come regola pratica, potete tranquillamente assumere che più importante è la questione, più difficile è ottenere una conoscenza affidabile sulla verità delle premesse – come scienziati sociali, dovrete molto spesso mediare tra l'ottenere una conoscenza affida-

bile e l'ottenere una qualche conoscenza. Qualunque cosa otterrete, sarà inferiore al tipo di certezza che i modelli proposizionali vi garantiscono. Infine, si noti che dobbiamo fare riferimento a un contesto particolare (più precisamente un *dominio di interpretazione*) per valutare se un certo argomento valido sia anche rilevante per la decisione. Questo perché la logica proposizionale può solo dirvi quali formule sono soddisfacenti – non vi dice quali formule sono vere (in un contesto specifico). È qui che la logica incontra la conoscenza e, di conseguenza, dove la logica si lega all'inevitabile incertezza che origina dalla conoscenza non logica.

Approfondimento: Modelli e Decisioni

La costruzione di un modello matematicamente solido è una condizione necessaria, ma generalmente non sufficiente, per determinare se un argomento corretto è rilevante per la decisione, cioè se potete agire come se la sua conclusione fosse vera *nel contesto di interesse*. Naturalmente è necessario – un argomento incoerente non vi porterà molto lontano. ◀

Esempio:

Consideriamo l'argomento:

Ciò che è a base vegetale, è salutare; Le sigarette sono a base vegetale
Dunque, le sigarette sono salutari.

Secondo la Definizione 9.2.1, l'argomento è valido se non ci sono modelli delle premesse che non siano modelli della conclusione. Ora, entrambe le premesse sono fattualmente false, così come lo è la conclusione. Dunque i modelli delle premesse (l'insieme vuoto) sono modelli della conclusione (ancora l'insieme vuoto). Dunque l'argomento è valido secondo la Definizione 9.2.1, ma non è rilevante alla decisione. ▶

L'esempio¹ illustra molto chiaramente il tipo di confusione che si genera quando si pensa che la Definizione 9.2.1 si applichi indistintamente a qualsiasi dominio di ragionamento e che quindi non sia necessario considerare anche la rilevanza alla decisione. Gli autori notano infatti:

Although this argument is logically sound (the conclusion follows logically from the premises), many people will evaluate it as unsound due to the implausibility of its conclusion about the health value of cigarettes.

Aggiungiamo: e quelle persone fanno molto bene! Il criterio di rilevanza alla decisione, e non quello di validità, è il criterio appropriato per il contesto di ragionamento.

¹Tratto da Gampa, A., Wojcik, S. P., Motyl, M., Nosek, B. A., & Ditto, P. H. (2019). "(Ideo)Logical Reasoning: Ideology Impairs Sound Reasoning". *Social Psychological and Personality Science*, 10(8), 1075-1083.

10.5 Esercizi

Esercizio 52

Nel Quesito 2.1.5 abbiamo assunto che arrivare puntuali fosse la negazione di essere in ritardo. Discutere l'adeguatezza della formalizzazione.

Esercizio 53(★)

Si consideri la proposizione:

Dopo l'ingresso di Elon Musk in politica, le azioni di Tesla sono crollate.

Dimostrare che il connettivo *dopo* non è composizionale nel senso discusso nel Capitolo 8.

Esercizio 54

Costruire un esempio che mostri la non-composizionalità del connettivo "perché".

Esercizio 55

Un sito di e-commerce ha in prima pagina il banner pubblicitario:

Compra quattro prodotti e ricevi il quinto in omaggio.

Formalizzare.

Esercizio 56

Formalizzare:

L'agente accede alla risorsa condivisa dopo aver effettuato il login.

Esercizio 57

Formalizza le seguenti espressioni:

1. Se il vaccino è sicuro e efficace allora è distribuibile
2. Se il vaccino è distribuibile allora è efficace e sicuro
3. Il vaccino è distribuibile solo se è sicuro ed efficace
4. Il vaccino è distribuibile se è sicuro ed efficace
5. Se il vaccino non è sicuro e non è efficace allora non è distribuibile
6. Se il vaccino non è sicuro o non è efficace allora non è distribuibile
7. Il vaccino non è distribuibile a meno che non sia sicuro ed efficace

Parte III

Appendici

A Soluzioni di esercizi scelti

A.1 Parte I

A.1.1 Esercizio 8

$$\begin{aligned}\neg((A \vee C) \wedge \neg(A \wedge C)) &\equiv \neg(A \vee C) \vee \neg\neg(A \wedge C) \\ &\equiv (\neg A \wedge \neg C) \vee (A \wedge C),\end{aligned}$$

ricordando che $\neg\neg(A \wedge C)$ è equivalente a $(A \wedge C)$ (vedi Teoria 2.4.1)

Esercizio 10

[A] $\forall x T(x)$

[B] $\forall x C(x)$

[C] $\exists x (T(x) \wedge C(x))$

[E] $\exists x (\neg T(x) \wedge C(x))$.

Esercizio 11

Definiamo N come l'insieme degli x tali che $N(x)$, e lo stesso per C e D .

Quindi, dalla prima premessa segue che $N \subseteq C$, dalla seconda che $Giulia \in C$, e dalla terza segue che $N \subseteq D$. Si veda la Figura A.1 per una rappresentazione grafica. L'unica cosa che sappiamo su Giulia, è che è molto motivata. Con $Giulia_i$ $i = 1, 2, 3$ abbiamo indicato i tre casi possibili che sono compatibili con le premesse del quesito. Potrebbe essere che Giulia è una nuotatrice professionista ($Giulia_1$), ma anche essere che non lo è, ma si allena comunque di domenica ($Giulia_2$). Il terzo caso compatibile coi dati è quello in cui Giulia non si allena di domenica, non è quindi neanche una nuotatrice professionista, ma è comunque una persona molto motivata ($Giulia_3$). Per vedere cosa segue da queste assunzioni bisogna vedere cosa segue da tutti i casi compatibili con esse. Si è quindi in grado di scartare le opzioni [A], [B], e [C] che, interpretate nella teoria degli insiemi, si possono riscrivere come:

[A] $D \subseteq N$

[B] $Giulia \in D$

[C] $Giulia \in N$

In particolare, $Giulia_3$ è un *controesempio* sia a [B] che a [C]. L'opzione [D] interpretata nella teoria degli insiemi ci chiede di verificare se “ $Giulia \in D$ oppure $Giulia \notin D$ ” e questo è ovviamente sempre vero.

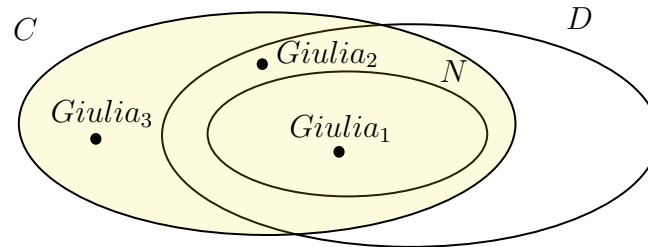


Figura A.1: Rappresentazione grafica delle tre premesse

A.1.2 Esercizio 9

Come al solito, introduciamo due variabili proposizionali A e B definite come segue.

A : “Alfa è un cavaliere”; e

B : “Beta è un cavaliere”.

Dato il contesto del quesito “Alfa è un furfante” lo formalizziamo con $\neg A$ mentre $\neg B$ formalizza “Beta è un furfante”. Le possibili valutazioni delle variabili A e B sono quattro: Alfa e Beta sono entrambi furfanti, Alfa è furfante e Beta è cavaliere, etc. Imponendo che il valore di verità della formalizzazione dei dati del quesito deve sempre essere 1, si riesce ad escludere alcune valutazioni. Le valutazioni che rimangono sono compatibili con tutti i dati e per trovare la risposta al quesito bisogna guardare cosa segue da queste.

Per prima cosa formalizziamo i dati del quesito.

Alfa: “Beta è un furfante”.

$$(A \rightarrow \neg B) \wedge (\neg A \rightarrow B)$$

Beta: “Siamo entrambi furfanti”.

$$(B \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)) \wedge (\neg B \rightarrow (A \wedge \neg B))$$

La formula $A \rightarrow \neg B$ si può leggere come “se Alfa è un cavaliere, i.e. dice sempre la verità, allora Beta è un furfante” mentre $\neg A \rightarrow B$ si interpreta come “se Alfa è un furfante, i.e. mente sempre, allora Beta è un cavaliere”.

Siccome $v((A \rightarrow \neg B) \wedge (\neg A \rightarrow B)) = 1$, segue che $v(A \rightarrow \neg B) = 1$ e $v(\neg A \rightarrow B) = 1$. Da questa osservazione segue che non può accadere che $v(A) = 1$ e $v(B) = 1$ in quanto renderebbe falsa $A \wedge \neg B$. Similmente non può accadere che $v(A) = 0$ e $v(B) = 0$ in quanto falsificherebbe $\neg A \rightarrow B$.

Imponendo il primo dato, si possono già escludere due possibili valutazioni:

1. $v(A) = 1$ e $v(B) = 1$
2. $v(A) = 0$ e $v(B) = 0$

Imponendo che anche il secondo dato sia soddisfatto richiedendo che $v((B \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)) \wedge (\neg B \rightarrow (A \wedge \neg B))) = 1$. Segue che $v(B \rightarrow (\neg A \wedge \neg B)) = 1$ e $v(\neg B \rightarrow (A \wedge \neg B)) = 1$. Quindi non deve accadere che $v(B) = 1$ e $v(\neg A \wedge \neg B) = 0$, i.e. sia la valutazione (1) che

$$(3) \quad v(A) = 0 \text{ e } v(B) = 1$$

Non sono compatibili coi dati. Imponendo che $v(\neg B \rightarrow (A \wedge \neg B)) = 1$, si ottiene che non deve accadere che $v(\neg B) = 1$, i.e. $v(B) = 0$ e $v(A \wedge \neg B) = 0$, da cui segue che non può essere $v(A) = 0$. Abbiamo nuovamente escluso la valutazione (2).

Segue che l'unica valutazione compatibile con tutti i dati del quesito è

$$(v) \quad v(A) = 1 \text{ e } v(B) = 0.$$

Ovvero, Alfa è un cavaliere e Beta un furfante.

A.2 Parte II

A.2.1 Esercizio 26

Verifichiamo l'identità abbreviando come segue $v(p) = x, v(q) = y, v(r) = z$.

	x	y	z	$\max\{x, y\}$	$\max\{y, z\}$	$\max\{\max\{x, y\}, z\}$	$\max\{x, \max\{y, z\}\}$
v_1	1	1	1	1	1	1	1
v_2	1	1	0	1	1	1	1
v_3	1	0	1	1	1	1	1
v_4	1	0	0	1	0	1	1
v_5	0	1	1	1	1	1	1
v_6	0	1	0	1	1	1	1
v_7	0	0	1	0	1	1	1
v_8	0	0	0	0	0	0	0

Poiché per ogni valutazione v_i le due colonne evidenziate coincidono, segue che

$$\max\{\max\{x, y\}, z\} = \max\{x, \max\{y, z\}\}.$$

cioè la funzione \max su $\{0, 1\}$ è associativa.

A.2.2 Esercizio 35

Costruiamo la matrice booleana per p, q e individuiamo le valutazioni che rendono vera A .

	p	q	$p \wedge (p \rightarrow q)$	A
v_1	1	1	1	1
v_2	1	0	0	1
v_3	0	1	0	1
v_4	0	0	0	1

La formula A è vera sotto *tutte* le valutazioni, dunque

$$[A] = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}.$$

Ne segue che A è equivalente alla disgiunzione di *tutti* gli atomi:

$$A \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q),$$

cioè una tautologia.

A.2.3 Esercizio 32

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1

A.2.4 Esercizio 36

Costruiamo la matrice booleana per le variabili p, q e individuiamo le valutazioni che rendono vera A .

	p	q
v_1	1	1
v_2	1	0
v_3	0	1
v_4	0	0

Dalla matrice si ricava:

$$[p] = \{v_1, v_2\}.$$

Agli elementi di $[p]$ corrispondono gli atomi:

$$\alpha_{v_1} = p \wedge q, \quad \alpha_{v_2} = p \wedge \neg q.$$

Quindi la variabile proposizionale p è logicamente equivalente alla seguente disgiunzione di atomi:

$$p \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q).$$

A.2.5 Esercizio 37

	p	q	r	s	A
v_1	1	1	1	1	0
v_2	1	1	1	0	1
v_3	1	1	0	1	0
v_4	1	1	0	0	1
v_5	1	0	1	1	0
v_6	1	0	1	0	1
v_7	1	0	0	1	0
v_8	1	0	0	0	1
v_9	0	1	1	1	0
v_{10}	0	1	1	0	1
v_{11}	0	1	0	1	0
v_{12}	0	1	0	0	1
v_{13}	0	0	1	1	0
v_{14}	0	0	1	0	1
v_{15}	0	0	0	1	0
v_{16}	0	0	0	0	0

Dunque,

$$[A] = \{v_2, v_4, v_6, v_8, v_{10}, v_{12}, v_{14}\}.$$

Gli atomi corrispondenti sono:

$$\begin{aligned} \alpha_{v_2} &= p \wedge q \wedge r \wedge \neg s, & \alpha_{v_4} &= p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s, \\ \alpha_{v_6} &= p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s, & \alpha_{v_8} &= p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge \neg s, \\ \alpha_{v_{10}} &= \neg p \wedge q \wedge r \wedge \neg s, & \alpha_{v_{12}} &= \neg p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s, \\ \alpha_{v_{14}} &= \neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s. \end{aligned}$$

Pertanto,

$$A \equiv \alpha_{v_2} \vee \alpha_{v_4} \vee \alpha_{v_6} \vee \alpha_{v_8} \vee \alpha_{v_{10}} \vee \alpha_{v_{12}} \vee \alpha_{v_{14}}.$$

A.2.6 Esercizio 40

Per la **Composizionalità della semantica proposizionale** (si veda pag. 163) e per la **Definizione di Soddisfacibilità** (si veda pag. 192) sarebbe necessario esibire una valutazione tale che

$$v(\neg q) = v(p \rightarrow q) = v(p) = 1.$$

Verifichiamo che ciò è impossibile ispezionando la matrice Booleana.

	p	q	$\neg q$	$p \rightarrow q$
v_1	1	1	0	1
v_2	1	0	1	0
v_3	0	1	0	1
v_4	0	0	1	1

Poiché nessuna valutazione soddisfa la congiunzione delle formule in X , segue che X non è soddisfacibile.

A.2.7 Esercizio 47

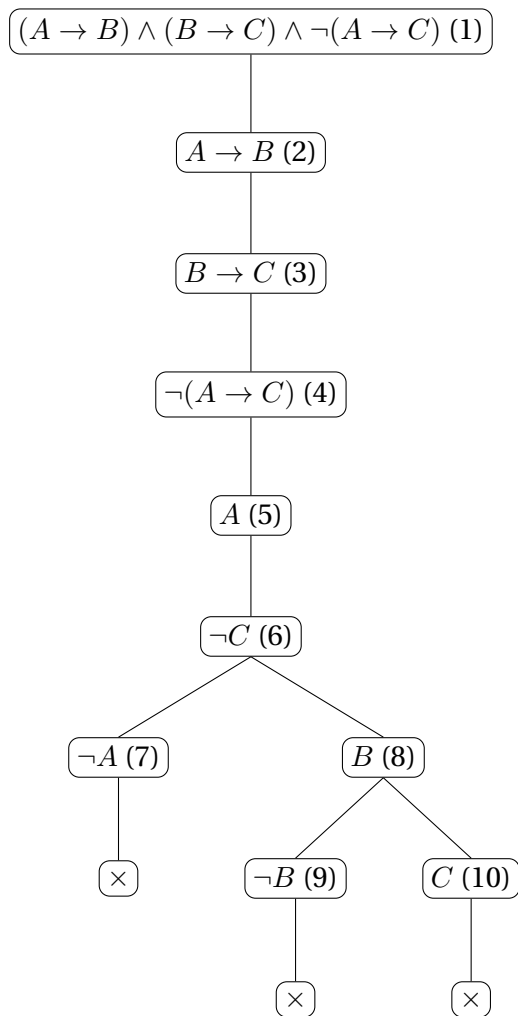
Dimostriamo che l'argomento

$$\frac{A \rightarrow B \quad B \rightarrow C}{A \rightarrow C}$$

è valido, costruendo un albero di refutazione per dimostrare che l'insieme

$$X = \{A \rightarrow B, B \rightarrow C\} \cup \{\neg(A \rightarrow C)\}$$

non è soddisfacibile.



1. Etichettiamo la radice con la congiunzione delle formule nell'insieme dato (1).
2. Applichiamo due volte la regola (\wedge), ottenendo sullo stesso ramo le formule $A \rightarrow B$ (2), $B \rightarrow C$ (3) e $\neg(A \rightarrow C)$ (4).
3. Applichiamo la regola per la negazione dell'implicazione ($\neg \rightarrow$) alla formula (4), ottenendo A (5) e $\neg C$ (6) sullo stesso ramo.
4. Applichiamo la regola per l'implicazione (\rightarrow) alla formula (2). Il ramo si biforca nei casi $\neg A$ (7) e B (8).
5. Nel ramo di (7) compaiono $\neg A$ e A (5), quindi il ramo si chiude (\times).
6. Nel ramo di (8) applichiamo la regola per l'implicazione (\rightarrow) alla formula (3), ottenendo una nuova biforcazione in $\neg B$ (9) e C (10).
7. Nel ramo di (9) compaiono $\neg B$ e B (8), dunque il ramo si chiude (\times).
8. Nel ramo di (10) compaiono C e $\neg C$ (6), quindi anche questo ramo si chiude (\times).

Poiché tutti i rami sono chiusi, l'insieme iniziale

$$\{A \rightarrow B, B \rightarrow C, \neg(A \rightarrow C)\}$$

non è soddisfacibile.

Di conseguenza, l'argomento $\frac{A \rightarrow B \quad B \rightarrow C}{A \rightarrow C}$ è valido.

A.2.8 Esercizio 50

Dimostriamo che l'argomento

$$\frac{\neg A \rightarrow (B \wedge \neg B)}{A}$$

è valido sia con il metodo delle matrici Booleane sia con quello degli alberi di refutazione.

Notate che l'argomento cattura il metodo di dimostrazione noto come *dimostrazione per assurdo*: se si assume $\neg A$ e da questa si ottiene una contraddizione, allora concludiamo $\neg\neg A$, cioè A .

Metodo delle matrici Booleane

Consideriamo l'insieme delle variabili proposizionali che compaiono nell'argomento:

$$\mathcal{L} = \{p, q\}.$$

Costruiamo la matrice booleana estesa alle formule rilevanti:

	p	q	$\neg p$	$q \wedge \neg q$	$\neg p \rightarrow (q \wedge \neg q)$
v_1	1	1	0	0	1
v_2	1	0	0	0	1
v_3	0	1	1	0	0
v_4	0	0	1	0	0

Osserviamo che per ogni valutazione v vale sempre

$$v(q \wedge \neg q) = 0.$$

Dunque, per ogni valutazione v vale

$$v(\neg p \rightarrow (q \wedge \neg q)) = 1 \quad \text{se e solo se} \quad v(\neg p) = 0,$$

cioè se e solo se $v(p) = 1$.

Ne segue che ogni valutazione che rende vera la premessa rende vera anche la conclusione. In particolare,

$$\{\neg p \rightarrow (q \wedge \neg q)\} \models p,$$

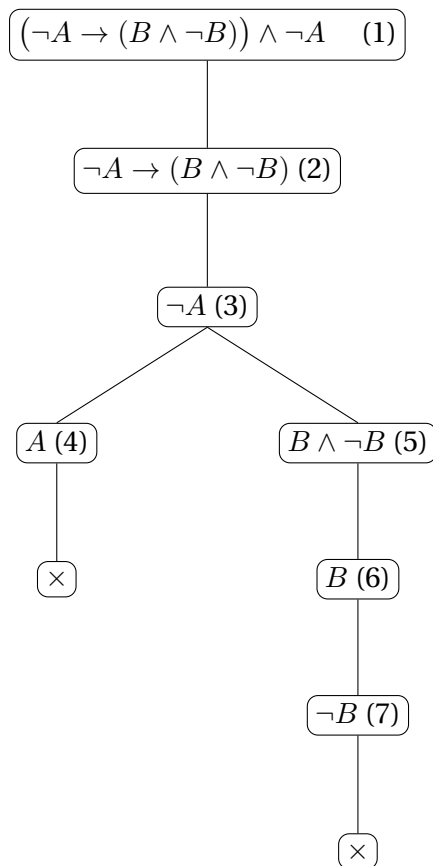
concludendo la dimostrazione della validità dell'argomento.

Metodo degli alberi di refutazione

Dimostriamo ora la validità costruendo un albero di refutazione per mostrare che l'insieme

$$X = \{\neg A \rightarrow (B \wedge \neg B)\} \cup \{\neg A\} = \{\neg A \rightarrow (B \wedge \neg B), \neg A\}$$

non è soddisfacibile.



1. Etichettiamo la radice con la congiunzione delle formule nell'insieme dato (1).
2. Applichiamo la regola (\wedge) ottenendo sullo stesso ramo le formule $\neg A \rightarrow (B \wedge \neg B)$ (2) e $\neg A$ (3).
3. Applichiamo la regola per l'implicazione (\rightarrow) alla formula (2). Questo produce una biforcazione nei casi A (4) e $B \wedge \neg B$ (5).
4. Nel ramo di (4) compaiono A (4) e $\neg A$ (3), quindi il ramo si chiude (\times).
5. Nel ramo di (5) applichiamo la regola (\wedge) ottenendo sullo stesso ramo B (6) e $\neg B$ (7).
6. Il ramo contiene ora B (6) e $\neg B$ (7). Poiché è un insieme non soddisfacibile, il ramo si chiude (\times).

Poiché tutti i rami sono chiusi, l'insieme iniziale

$$\{\neg A \rightarrow (B \wedge \neg B), \neg A\}$$

non è soddisfacibile.

Di conseguenza, l'argomento $\frac{\neg A \rightarrow (B \wedge \neg B)}{A}$ è valido.

A.2.9 Esercizio 56

Applicando la Procedura 5 è ragionevole considerare la seguente interpretazione Booleana:

p : "L'agente effettua il login";

q : "L'agente accede alla risorsa condivisa".

Costruiamo la matrice Booleana per testare $p \rightarrow q$.

Si nota immediatamente che v_2 è incompatibile con il significato della proposizione da formalizzare. Questo suggerisce di considerare il login una condizione necessaria all'accesso, formalizzabile attraverso $q \rightarrow p$. Costruiamo la matrice Booleana per testarlo.

	p	q	$p \rightarrow q$	
v_1	0	0	1	no login e no accesso
v_2	0	1	1	accesso senza login
v_3	1	0	0	login senza accesso
v_4	1	1	1	login con accesso

Tabella A.1: Matrice Booleana per testare $p \rightarrow q$

	p	q	$q \rightarrow p$	
v_1	0	0	1	no login e no accesso
v_2	0	1	0	login senza accesso
v_3	1	0	1	accesso senza login
v_4	1	1	1	login con accesso

Tabella A.2: Matrice Booleana per testare $q \rightarrow p$

Nemmeno questa è una formalizzazione adeguata della proposizione. Per vederlo si osservi che v_3 valuta in 1 la situazione in cui l'agente non ha accesso alla risorsa condivisa pur avendo effettuato il login.

A.2.10 Esercizio 57

Per tutti i casi è sufficiente considerare il linguaggio $\mathcal{L} = \{p, q, r\}$ con l'interpretazione:

- p : “il vaccino è sicuro”;
- q : “il vaccino è efficace”;
- r : “il vaccino è approvato”.

Risolviamo il primo.

1. Se il vaccino è sicuro e efficace, allora è distribuibile: $(p \wedge q) \rightarrow r$.

A.2.11 Esercizio 52

Si tratta di un'ipotesi che nel contesto di quel problema sembra appropriata. Ha inoltre il vantaggio di contenere il numero di variabili proposizionali necessarie alla risoluzione del problema mediante la matrice Booleana, che come ricorderete, cresce esponenzialmente con il numero di variabili proposizionali considerate.

A.2.12 Esercizio 53

Applichiamo la Procedura 5 per la formalizzazione come segue:

p : “Le azioni di Tesla sono crollate”;

q : “Elon Musk è entrato in politica”.

Assumiamo che *dopo* sia il connettivo δ . Consideriamo i casi descritti nella Tabella A.3. Il nostro obiettivo è mostrare che il valore di verità di $p \delta q$ non è funzione dei valori di verità dei suoi componenti.

	p	q	$p \delta q$
v_1	1	1	0,1
v_2	1	0	0
v_3	0	1	0
v_4	0	0	0

Tabella A.3: Matrice Booleana per il connettivo δ .

v_1 : cattura la situazione in cui è vero che le azioni di Tesla sono crollate, ed è vero che Elon Musk è entrato in politica. Tuttavia entrambi i valori di verità sono possibili, perché potrebbe darsi che le azioni siano crollate prima dell'ingresso in politica di Musk (nel qual caso avremmo $v_4(p \delta q) = 0$, ma potrebbe anche darsi che siano crollate dopo, nel qual caso $v_4(p \delta q) = 1$. Dunque v_4 non è una valutazione Booleana, come desiderato.

v_2 : cattura la situazione in cui è vero che le azioni di Tesla sono crollate, ma non è vero che Elon Musk è entrato in politica. Dunque è falso che le azioni di Tesla sono crollate dopo l'ingresso di Elon Musk in politica.

v_3 e v_4 : catturano la situazione in cui non è vero che le azioni di Tesla sono crollate. Dunque non è vero che le azioni di Tesla sono crollate dopo l'ingresso di Elon Musk in politica.

Secondo la Procedura di verifica dell'adeguatezza della formalizzazione Booleana ci permette un'unica possibilità, cioè

p : “Le azioni di Tesla sono crollate dopo l'ingresso di Elon Musk in politica”.

C'è quindi una notevole perdita di informazione tra l'enunciato di partenza e la sua formalizzazione. Recuperare queste informazioni è la motivazione principale per lo studio delle logiche temporali.

Infine, osserviamo che qui stiamo sfruttando il significato ordinario dell'italiano della preposizione impropria “dopo” per selezionare il vettore di verità (non booleano, in questo caso) che intendiamo associare al connettivo δ . In altre parole, stiamo applicando la logica proposizionale in un contesto extra-matematico, in cui non abbiamo più una garanzia automatica di adeguatezza tra forma logica e significato.

Logica pratica

Dai quesiti dei test di ammissione ai metodi della logica elementare

Esther Anna Corsi e Hykel Hosni

Logica pratica è un'introduzione al ragionamento logico e matematico pensata per chi vuole imparare mettendosi alla prova. Invece di partire dalla teoria e dalle definizioni astratte, il libro guida studentesse e studenti attraverso le soluzioni di problemi scelti con cura, molti dei quali ispirati ai test di ammissione universitari. Quesiti su insiemi, ragionamento booleano, enunciati quantificati, successioni e probabilità diventano così l'occasione per impadronirsi dei metodi della logica elementare, utili non solo negli studi universitari, ma anche per argomentare con precisione nella vita quotidiana.

ISBN 979-12-5510-428-5 (print)
ISBN 979-12-5510-424-7 (PDF)
ISBN 979-12-5510-426-1 (EPUB)
DOI 10.54103/milanoup.291